点集拓扑学原理

点集拓扑学原理

[美] John D. Baum 著

蒲思立 译　刘应明 校

人 民 教 育 出 版 社

本书是译者根据John D. Baum著Elements of Point Set Topology一书译出. 原书初稿曾在Oberlin学院试用. 译者对原书个别定理证明中不够清楚的地方，稍作改动. 本书可作数学系高年级学生拓扑学课程的教学参考书.

点集拓扑学原理

[美] John D. Baum 著

蒲思立 译 刘应明 校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5 字数 120,000

1981年6月第1版 1982年7月第1次印刷

印数 00,001—11,500

书号 13012·0630 定价 0.69 元

序　言

在写这本书时，我经常考虑的是小型学院的大学生．在他们的大学生活中，人们通常强调尽早介绍近世代数的重要性．然而，在大学课程中开设拓扑学的必要性似乎没有受到同样重视．由于我感到泛函分析在数学中是各个分支的一种较大的综合，以及了解到作为分析的基础的代数和拓扑学的根本重要性，因此，我试图提供一个与近世代数许多现代教材的精神相平行的拓扑学初等教材．希望在不太远的将来，一学期的拓扑学课程将被主修数学的大多数学生所修习，从而能为大学生开设近代分析的课程．

本书注意几何直觉以及公理方法．强调几何直觉的原因是，我相信这些学生在几何方面已经具有许多经验．如果他们能运用自己的几何直觉，学习拓扑学是不困难的．强调公理方法有双重原因：首先，这与学生在近世代数中的经验相平行，其次，它使本书与数学的近代发展趋势一致．

除去上面提到的主要目的之外，还需指出两点．因为点集拓扑学的一个初等课程不仅是分析的基础，而且也是在点集拓扑学和代数拓扑学方面进一步进行工作的基础，因而本书试图包括一些这样的题材，它们将为具有分析学以外的兴趣的学生服务．当然，主要的题材是在分析中重要的那些内容．但是也有一些内容偏离了主要题材．这些内容虽然在分析中不太重要，但将使那些希望继续学习点集拓扑学或是代数拓扑学的学生感兴趣．

在某种意义上，本书预计的阅读对象决定了这本书的形式．开始部分的证明很详细，这在职业数学家看来是太详细了．然而，根据我的经验，通过这种性质的课程初次接触公理数学的学生在

开始阶段通常都需要一些帮助. 后面章节的内容则需要学生更多地依靠自己的才智，因为证明已经不再如前面那样详细. 对于证明所谈到的这些同样也适用于练习. 本书开始部分的练习是简单的，而且有时有些琐碎. 然而，特别是最后一章的练习则需要学生下相当的功夫才能解决. 我们没有提供书中概念的最初来源，但是列出了有兴趣的学生进一步阅读的参考书目. 在所列出的许多参考书中都能找到原始资料的详细目录，以至把它们包括在本书内似乎是多余的.

奥柏林(Oberlin)学院使用本书初稿的经验表明，在有十五周的一个学期内就能将书中内容轻松地讲授完毕. 如果感到分量太重，可以删去某些内容而不至于影响本书的连贯性. 如果需要一个比较简短的教程，本书第一章第八节，第三章第三节、第四节，第四章第四节、第五节以及第五章第三节可以删去. 本书练习中包括许多说明理论的不可缺少的例子. 我极力主张，如果不是全部，至少也应该作完大部分练习. 有几个练习归作"学期论文"一类，这可以作为学生进一步研究的课题；对于愿意指定学生作学期论文而不进行传统的期终考试的教师，这些练习可供参考.

定理、定义、引理和推论在每一章连续编号. 因此，第三章中的第十个定理(或定义、引理、推论)编号为 3.10. 每一章的练习都从 1 开始连续编号. 例如练习 2.12 表示第二章的第十二题. 定理证明完毕记以符号 "▌".

我感谢 R. H. Bing 和 M. L. Curtis 两位教授的有益建议. 感谢 Ruth Edwards 和 Elizabeth Carter 帮助打印原稿. 感谢许多学生找出本书初稿的不少打印错误. 鉴于他们人数太多，这里不再一一提及. 尽管如此，本书的任何错误都应当由我承担全部责任.

J. D. 包姆(John D. Baum)

目　录

预备知识……1
1. 引言……1
2. 集合……1
3. 集代数……3
4. Euler-Venn 图……7
5. 关系……8
6. 无限集……11
7. 关于实数的各种假设……17
第一章　拓扑空间——基本定义与定理……19
1. 邻域系与拓扑……19
2. 拓扑空间中的开集……23
3. 极限点和导集……27
4. 集合的闭包……28
5. 闭集……31
6. 子空间……35
7. 序列的极限·Hausdorff 空间……38
8. 拓扑的比较……42
9. 基·可数性公理·可分性……43
10. 次基·积空间……49
第二章　连续函数(映射)与同胚……55
1. 函数……55
2. 连续函数(映射)……57
3. 同胚……60
4. 积空间……64
第三章　几种特殊类型的拓扑空间(各种紧性)……69
1. 紧空间……69

2. 分离公理……78
3. 列紧性……80
4. 局部紧性……92
第四章 又一些特殊类型的拓扑空间(主要的几种连通性)……97
1. 引言……97
2. 连通空间……98
3. 连通分支……103
4. 局部连通性……106
5. 弧连通性……108
第五章 度量空间……114
1. 定义……114
2. 度量空间的某些性质……118
3. 度量化定理……124
4. 完备度量空间……131
5. 范畴定理……135
参考书……144
索引……146

预 备 知 识

§1 引　　言

近代的多数数学领域都是从一组未被定义的对象以及刻划这些对象性态的一组公理开始的. 以这样的方式探讨一门数学学科有许多优点. 也许,这样做的最大优点是,对于我们遇到的任何一个数学系统,如果它服从一个特殊数学领域的公理,则它也将服从在这个领域内成立的一切定理. 因为任何公理的发展都是从一个未被定义的对象的集合开始的,因此,我们在发展公理体系之前研究一些集合理论就显得是必不可少的了.

§2 集　　合

作为数学一个领域的集合论, 可以用公理法展开. 但在这里我们不采用这样的观点, 而宁愿充分依赖我们的直觉来发展这一理论. 按照 Cantor 的说法,"集合"是由"确定的, 各别的对象 m 组成的一个整体(记为 M), 而这些对象是我们感觉到的或我们想象到的."用来形成集合的对象称为该集合的元素或元. 我们认为整个集合是一个单独的实体. 一般说来, 用大写字母表示集合, 比如, 用罗马字母 A, B, $\cdots$, 或草书体字 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\cdots$, 或德文字母 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\cdots$. 集合的元素一般用小写罗马字母表示.

我们可以用两种方式表示一个集合的元素是什么. 如果一个集合的元素不多,则可以直接列出它的全部元素. 约定一个统一的写法:在大括弧内直接写出集合的全部元素. 例如, $A=\{1, 2, 3\}$. 元素之间要用逗点分开. 如果一个集合的元素很多, 用上面的方

法表示是很麻烦的. 这时, 我们可以用写出集合全体元素都满足的共同性质的办法来表示集合. 例如, $A=\{x|x$ 是小于 4 的正整数$\}$. 我们的表示法为, 写出大括弧, 用某一个字母表示集合的一般元素(上面是用 x), 画出竖直线并写出集合的一般元素连同全体元素都满足的共同性质.

某元是一个集合的元素可以写作, 例如 $2\in A$ 的形式, 读作"2是集合 A 的元素"或"2是 A 的元"或简单读为"2属于 A". 如果一个元素不属于一个集合, 可以记为, 例如 $4\notin A$ 的形式, 读作"4不属于 A", "4不是集合 A 的元素"或"4不是 A 的元".

如果对于每一个 $x\in A$ 都有 $x\in B$, 则称集合 A 是集合 B 的子集, 或称 B 包含 A, 记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$. 若 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立, 则集合 A 与 B 的元素完全相同, 记为 $A=B$. 符号 ϕ 表示空集, 也就是不包含任何元素的集合. 应当注意到下列关系式恒成立: $A\subseteq A$, $A=A$, $\phi\subseteq A$ 以及 $A\subseteq\phi$ 当且仅当 $A=\phi$. "$\subseteq$"是一个传递关系, 也就是说, 如果 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq C$, 则有 $A\subseteq C$.

符号 $A\subset B$ 表示 $A\subseteq B$ 同时 $A\neq B$. 这个符号有时会遇到. 一个集合不被包含于另一个集合, 例如 $A\subseteq B$ 不成立, 我们记为 $A\nsubseteq B$.

我们在这里第一次向学生指出, 今后在学习本书的进程中还要继续指出, 在不同的书中, 同一个数学符号的含意可能是很不相同的. 集合包含符号$\subseteq$与集合真包含符号$\subset$就是这样. 有的著者对集合的包含使用符号$\subset$而不引进集合真包含符号. 在阅读其它著作时学生应当弄清楚书中各种符号的确切含意.

练　习

0.1　证明上面叙述的几个关系式恒成立, 即是对任意集合 A, 下列关系式成立

(a) $A \subseteq A$.

(b) $A = A$.

(c) $\phi \subseteq A$.

(d) $A \subseteq \phi$ 当且仅当 $A = \phi$.

0.2 对任意集合 A, B 和 C, 证明

(a) 如果 $A \subseteq B$ 与 $B \subseteq C$ 成立, 则 $A \subseteq C$ 成立.

(b) 如果 $A \subset B$ 与 $B \subset C$ 成立, 则 $A \subset C$ 成立.

§3 集代数

我们现在定义集合的两种运算. 第一种运算是两个集合的并 $A \cup B$. 定义 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$. 这里"或"的含意还有"并有"之意, 所以同时在 A 与 B 中的元素也在 $A \cup B$ 中. 第二种运算是两个集合的交 $A \cap B$. 定义 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 与 $x \in B\}$. 由定义可以直接得出集合的下列运算公式:

1. (a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

   (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2. (a) $A \cup B = B \cup A$.

   (b) $A \cap B = B \cap A$.

3. (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. (a) $A \cup A = A$.

   (b) $A \cap A = A$.

5. (a) $A \subseteq A \cup B$.

   (b) $A \supseteq A \cap B$.

6. (a) 若 $A \subseteq C$ 与 $B \subseteq C$, 则 $A \cup B \subseteq C$.

   (b) 若 $A \supseteq C$ 与 $B \supseteq C$, 则 $A \cap B \supseteq C$.

7. (a) $A \cup \phi = A$.

(b) $A\cap\phi=\phi$.

如前所述，$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$. 这样，为了证明上面所列的大部分关系式，必须证明两个包含关系. 我们用证明 2(a)来说明这一点. 设 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$，因此 $x\in B$ 或 $x\in A$，从而 $x\in B\cup A$，这说明 $A\cup B\subseteq B\cup A$. 相反，设 $x\in B\cup A$，则 $x\in B$ 或 $x\in A$，因此 $x\in A$ 或 $x\in B$，从而 $x\in A\cup B$，这说明 $B\cup A\subseteq A\cup B$. 由刚才证明的两个包含关系便可得出 $A\cup B=B\cup A$.

我们通常都假定所要讨论的集合是某个基础集合 U 的子集. 由此定义集合 A 的余集 A^c. 规定 $A^c=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$. 将 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 定义为集合 A 与 B 之差集. 由这些定义可以得出集合的又一些运算公式:

8. (a) $\phi^c=U$.

   (b) $U^c=\phi$.

9. (a) $A\cup A^c=U$.

   (b) $A\cap A^c=\phi$.

10. $(A^c)^c=A$.

11. 如果 $A\subseteq B$，则 $A^c\supseteq B^c$. 此命题的逆命题也成立.

12. (a) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

    (b) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

13. $A-B=A\cap B^c$.

上面的公式 12(a)与 12(b)称为 **DeMorgan** 公式. 不久之后我们将有这两个公式更一般的形式. 学生应当自己验证上面每一个公式的正确性. 这里再一次向学生提出，我们用来表示集合的余集的符号 A^c 可能与他在其它课本上看到的不一样.

现在已经有的集合运算公式大概已能满足我们的需要. 然而下面一组练习给出了一些有时可能有用的进一步的关系.

练　　习

设 A, B 与 C 表示某基础集 U 中的集合. 证明下列关系式:

0.3　由 $A\subsetneq B$ 一般不能得出 $B\subseteq A$.

0.4　$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cup B=B$.

0.5　$A\subsetneq B$ 当且仅当 $A\cap B=A$.

0.6　$A\cap(B-C)=B\cap(A-C)=(A\cap B)-C=(A\cap B)-(A\cap C)$.

0.7　$A-B=A-(A\cap B)$.

0.8　$A\cap B=\phi$ 当且仅当 $A\subseteq B^c$.

0.9　如果 $A\cup B=U$ 以及 $A\cap B=\phi$, 则 $B=A^c$.

0.10　$(A-B)^c=B\cup A^c$

0.11　$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$.

0.12　$(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$.

0.13　$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

0.14　$A-(A-B)=A\cap B$.

0.15　$A\cup(B-A)=A\cup B$.

0.16　$A\cap(B-A)=\phi$.

对并(或交)使用上面的结合律 1(a)和 1(b), 我们显然能够得到任意有限个集合的并(或交). 对任意集族(未必是有限的集族)求它们的并与交是有用的. 为了定义这样一个概念, 需要用到指标集. 能够想象指标集作为一个标记集. 这样, 集族的每一个元素都被赋予了指标集的一个标记. 设 A 是一个指标集, 对每一个 $\alpha\in A$, 相伴着一个集合 B_α. 我们定义

$$\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha=\{x\mid 对某个\ \alpha\in A\ 有\ x\in B_\alpha\}$$

以及

$$\bigcap_{\alpha\in A}B_\alpha=\{x\mid 对每一个\ \alpha\in A\ 有\ x\in B_\alpha\}.$$

如果 A 是空集，定义

$$\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha=\phi \quad 及 \quad \bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha=U.$$

下列运算公式成立：

14. 如果 $\alpha\in A$, 则 $\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq B_\alpha\subseteq \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$, 其中 $A\neq\phi$.

15. (a) 如果对每一个 $\alpha\in A$ 有 $B_\alpha\subseteq C$, 则 $\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq C$.

    (b) 如果对每一个 $\alpha\in A$ 有 $B_\alpha\supseteq C$, 则 $\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha\supseteq C$.

16. 如果对每一个 $\alpha\in A(A\neq\phi)$ 有 $B_\alpha\subseteq C_\alpha$, 则有 $\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq \bigcup_{\alpha\in A} C_\alpha$ 和 $\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$.

17. (a) $\bigcup_{\alpha\in A}(B_\alpha\cup C_\alpha)=(\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha)\cup(\bigcup_{\alpha\in A} C_\alpha)$.

    (b) $\bigcap_{\alpha\in A}(B_\alpha\cap C_\alpha)=(\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha)\cap(\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha)$.

18. 若 $A\neq\phi$, 则 $\bigcap_{\alpha\in A}(C\cup B_\alpha)=C\cup(\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha)$.

19. 若 $A\neq\phi$, 则 $\bigcup_{\alpha\in A}(C\cap B_\alpha)=C\cap(\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha)$.

20. (a) $(\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha^c$

    (b) $(\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha^c$

    (DeMorgan 公式).

并和交的符号除如上所述之外，有时也如下表示．设 $\mathscr{F}$ 是集族 $\{B\}$, 则 $\bigcup_{B\in\mathscr{F}} B=\{x\mid 对某个\ B\in\mathscr{F}\ 有\ x\in B\}$. 对交也有与此相似的表示法.

下面的符号有时也偶然用到．如果 $\mathscr{A}$ 是集族 $\{A\}$, X 是某个确定的集合，则 $\mathscr{A}\cap X$ 表示集族 $\{A\cap X\mid A\in\mathscr{A}\}$.

最后，设 $X_i(i=1, 2, \cdots, n)$是集合，则这些集合的**笛卡儿积**是 $\prod_{i=1}^{n} X_i=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_i\in X_i\}$. 这就是说，$n$ 个集合的笛卡儿积是由所有可能的$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$形成的集合，其中每一个 n 元

组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的第 i 个元素取自集合 X_i. 在只有两个集合的情况下，我们常将 $\overset{2}{\underset{i=1}{\times}} X_i$ 记为 $X_1 \times X_2$. 例如，如果 $A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$, 则

$$A \times B=\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

我们将在以后用较多的篇幅讨论笛卡儿积。

练　习

0.17　证明 DeMorgan 公式[20(a)与 20(b)]不仅在 $A \neq \phi$ 时成立，而且在 $A=\phi$ 时也成立.

0.18　实直线 R 与自身的笛卡儿积是实平面. 如果第 I 象限是集合$\{(x, y) \mid x>0, y>0$ 且 x, y 是实数$\}$, 试将它写成笛卡儿积的形式.

0.19　如果 $R^+=\{x \mid x$ 是实数且 $x>0\}$. 设 $\mathscr{A}$ 是 R^+ 的所有子集所成的集族, $B=[-1, 1]=\{x \mid x$ 是实数且 $-1 \leqq x \leqq 1\}$. 试描述 $\mathscr{A} \cap B$.

§ 4　Euler-Venn 图

在研究集合论中的问题时，集合之间的关系图对我们常有帮助. 这样的图通常称为 Venn 图或 Euler 图，也可以称为 **Euler-Venn 图**. 通常将基础集合画成一个大的矩形而将所讨论的集合画在矩形内部. 例如，图 0.1 就是一个描述 $A \cap B$ 的 Euler-Venn 图.

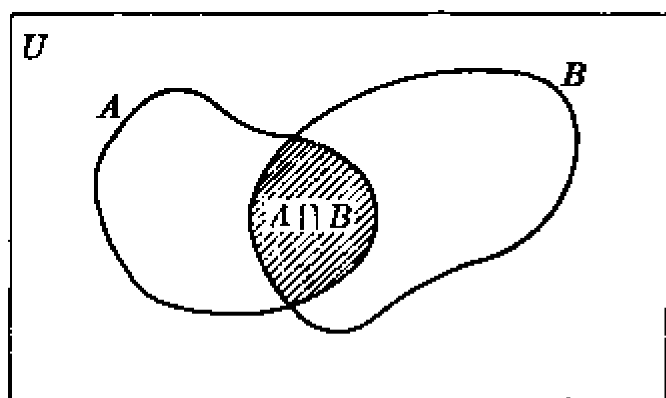


图　0.1

应当注意到，图形本身并不能给出集合论中的某个结果的证明，但它常能启发我们怎

样去作出证明. 例如, 下面的图 0.2 和 0.3 能够提示我们证明等式 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$的途径.

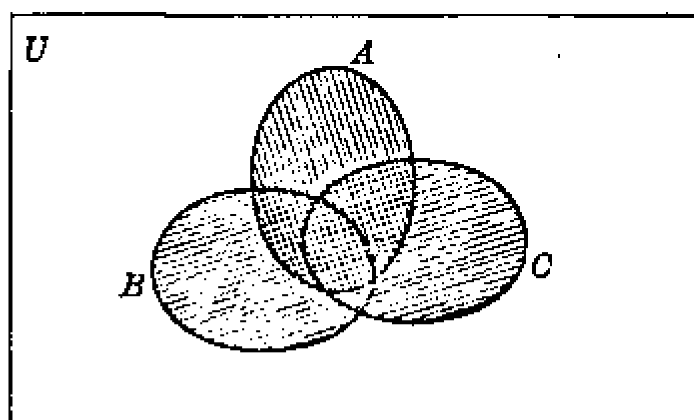


图 0.2 [表示 $A\cap(B\cup C)$]

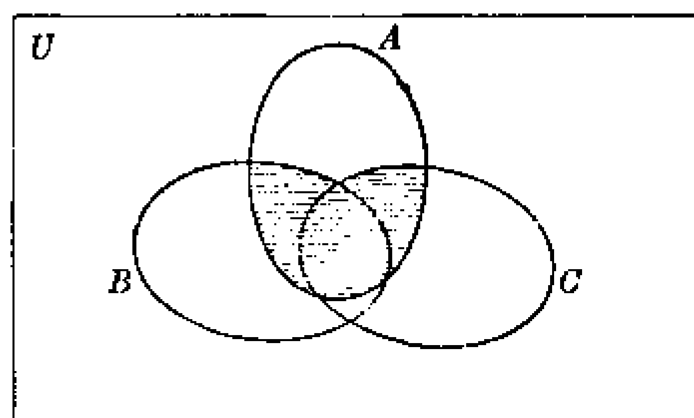


图 0.3 [表示$(A\cap B)\cup(A\cap C)$]

练　　习

0.20 作出下面每一种情况的 Euler-Venn 图:

(a) $A\subseteq B$.

(b) $A\cap B\neq\phi$.

(c) $A\subset B^c$.

(d) $A\cap B\neq\phi$, $B\cap C\neq\phi$, $C\cap D\neq\phi$, $D\cap A\neq\phi$, $A\cap C=\phi$, $B\cap D=\phi$.

§5 关　　系

我们不一般地研究关系, 而是将注意集中到以后特别有用的

两类关系上. 我们首先一般地定义关系的概念. 简单地说, 集合 A 上的**关系**是序偶(a, b)所成的一个集合, 此处 $a\in A$, $b\in A$. 我们通常用 R 表示关系, 用 aRb 表示序偶(a,b)是关系集合的元素.

等价关系是满足下面三条性质的关系:

(1) 对每一个 $a\in A$ 有 aRa(**自反性**).

(2) 如果 aRb, 则也有 bRa(**对称性**).

(3) 如果有 aRb 与 bRc, 则有 aRc(**传递性**).

如果 R 是集合 A 上的一个等价关系, 我们用 $R(a)$, 或$[a, R]$, 或者$[a]$表示集合 $\{b \mid b\in A$ 且 $aRb\}$. 称集合$[a]$是由 a 决定的**等价类**. 设 $\mathscr{F}$ 是 A 的一个子集族, 如果它是不相交的(也就是说如果 $B, C\in\mathscr{F}$, $B\neq C$, 则 $B\cap C=\phi$)而且它的并是 A, 则称 $\mathscr{F}$ 是集合 A 的一个划分. 我们有下面的重要定理.

0.1 定理 集合 A 上的每一个等价关系诱导出 A 的一个划分, 此划分将 A 分成诸等价类. 反之, A 的每一个划分 $\mathscr{F}$ 诱导出 A 上一个等价关系, 且此等价关系的等价类正好是 $\mathscr{F}$ 中的集合.

证明 设 $\mathscr{F}=\{[a] \mid a\in A\}$. 对每一个 $a\in A$, 因为 $a\in[a]$, 故

$$\bigcup_{[a]\in\mathscr{F}}[a]=A.$$

现在假设$[a]\cap[b]\neq\phi$, 从而我们可以选出 $c\in[a]\cap[b]$. 根据$[a]$与$[b]$的定义可以得出 cRa 和 cRb. 由 R 的对称性与传递性便可以得出 aRb. 设 $d\in[a]$, 也就是 aRd, 因为我们已经有了 aRb, 再根据 R 的传递性便可以得出 dRb, 所以 $d\in[b]$. 同样可以证明对任意一个 $e\in[b]$, 我们能够得出 $e\in[a]$. 因此$[a]=[b]$. 这样一来我们证明了这些等价类要末不相交, 否则便是相同的, 因此 $\mathscr{F}$ 是 A 的一个划分.

反过来, 设 $\mathscr{F}$ 是 A 的一个划分. 当且仅当 a 与 b 属于同一个 $B\in\mathscr{F}$ 时定义为 aRb. 则 R 是一个等价关系而且 R 的等价类

正好是 $\mathscr{F}$ 中的集合．详细的证明留给读者．∎

序关系是我们需要考虑的第二类关系．一般说来，序关系是具有传递性的关系．下面区别我们需要的两类特殊的序关系．第一类是**偏序关系**．我们定义集合 S 上的一个偏序关系是满足下列条件的关系：

(1) 对任意一个 $x\in S$ 有 xRx.

(2) 对任意 $x, y\in S$, 如果有 xRy 与 yRx, 则有 $x=y$.

(3) 对任意 $x, y, z\in S$, 如果有 xRy 与 yRz, 则有 xRz.

偏序关系的一个典型例子是在某个基础集合 U 的所有子集所成的集族上的关系 $A\subseteq B$.

我们需要的第二类序关系是**全序关系**．为了我们的目的，定义全序关系是满足下一条件的偏序关系：

(4) 如果 $x, y\in S$, $x\neq y$, 则或者有 xRy 或者有 yRx.

全序关系的一个典型例子是实数集合上的关系 $x\leq y$.

学生们应当注意，他们可能遇到与上面不相同的全序关系的定义．具体说来，有时也如下定义全序关系：

集合 S 上的一个全序关系是满足下列条件的关系：

(1) 对任意 $x, y\in S$, 下面三条有一条且仅有一条成立：

$$xRy,\ yRx,\ x=y.$$

(2) 对任意 $x, y, z\in S$, 如果有 xRy 和 yRz, 则有 xRz.

这样定义的全序关系的一个典型例子是实数集合上的关系 $x<y$. 不过为了我们的目的，本书采用前面一个定义作为全序关系的定义．

练　　习

0.21　在正整数集合 Z^+ 中，设 xRy 意味着 $x-y$ 能被 7 整除(即是 $x-y=7k$, 此处 k 是一个整数)．试证明 R 是一个等价关

系并写出它的等价类.

0.22　在正整数集合 Z^+ 中，设 $m \leq n$ 意味着 n 是 m 的倍数(即是 $n=mk$，此处 $k \in Z^+$)．试证"$\leq$"是 Z^+ 上的一个偏序.

§6 无 限 集

在第二章的开始部分我们将用较多的篇幅定义和讨论函数．但目前我们需要一类特殊的函数．在 A 与 B 之间以如下方式定义一个一一对应*：首先想象 f(函数或对应)是序偶(a, b)形成的一个集合(其中 $a \in A$, $b \in B$)而且合于，如果(a, b)与$(a, b') \in f$，则 $b=b'$．简而言之，f 是单值的．因为对点(或者元素)$a \in A$，我们想象 f 确定了一个值 $b \in B$．这通常记为 $f(a)=b$．经过微积分的学习，这个符号学生应当是熟悉的．进而我们要求每一个 $a \in A$ 是某一个序偶$(a, b) \in f$ 的第一个元素．这保证了对每一点(或元素)$a \in A$，f 确定了一个且仅只一个值 $b \in B$．在这些条件下 f 称为一个函数．为了 f 是一一对应，我们进一步要求每一个 $b \in B$ 是某一个序偶$(a, b) \in f$ 的第二个元素，而且如果(a, b)与$(a', b) \in f$，则 $a=a'$．这就是说对于元素 $b \in B$有元素 a 存在，使得 $f(a)=b$，而且对每一个 $b \in B$ 仅有一个元素 $a \in A$，使得 $f(a)=b$.

一一对应就是对于每一个 $a \in A$ 正好确定一个 $b \in B$ 以及对于每一个 $b \in B$ 正好确定一个 $a \in A$．一一对应的一个典型例子是函数 $f(x)=x+1$，这里 A 与 B 都是实数集．一个不是一一对应的函数的例子是 $f(x)=x^2$，这里 A 是实数集，B 是非负实数集.

如果一个集合的某个子集与正整数集 Z^+ 之间存在一一对应，则称这个集合是**无限集**．如果一个集合本身与正整数集 Z^+ 之间存在一一对应，则称这个集合是**可数无限的**．不是无限的集

* 译注　为消除本书有关函数论述的含混之处，将此处原文中的"(或函数)"删去.

合称为**有限的**．有限集或可数无限集称为**可数的**．

下面是这些定义的直接推论．如果 A 是无限的且 $A\subseteq B$，则 B 是无限的；如果 B 是有限的且 $A\subseteq B$，则 A 是有限的；如果 A 是无限的，$a\in A$，则 $A-\{a\}$ 是无限的．

现在我们介绍一个公理，这个公理将使得以后的许多证明成为可能．没有这个公理的假设，这些证明或许也能给出，但目前看来这似乎相当不可能．下述事实是已知的：称为选择公理的这个附加的公理的引入不会在我们已有的相容的系统中导致任何矛盾．这个公理是：

选择公理 设 $\mathscr{F}=\{B_\alpha|\alpha\in A,\ A$ 是一个指标集$\}$为非空不相交的集合所成的非空集族，则存在一个集合 C，使得对于每一个 $\alpha\in A$，$C\cap B_\alpha$ 只有一个元素．

设想 $C\cap B_\alpha$ 中的唯一元素是 b_α，我们能够定义一个由 A 到 C 的函数 $f(\alpha)=b_\alpha$．此时 f 称为一个选择函数，因为它为我们从每一个 B_α 选出一个(且仅只一个)元素．事实上，选择公理有很多等价的叙述，但是我们不打算在这里继续讨论这个问题．稍后，我们将需要选择公理的另外一个形式，它通常被称为 Zorn 引理．我们将在适当的地方叙述这个引理．对于这些内容有兴趣的学生可以参阅本章末尾所列参考书中的适当书籍．

下面是由有限集与无限集的定义得出的简单结果．

设 F 是一个有限集，Z_n 是整数集 $\{k|0<k\leq n\}$，则或者 $F=\phi$ 或者对某一个整数 n，在 Z_n 与 F 之间存在一个一一对应．相反，如果或者 $F=\phi$，或者对某一个整数 n，在 F 与 Z_n 之间存在一个一一对应，则 F 是有限的．

由以上注释容易看出，两个有限集之并也是有限集；如果 A 是无限集，F 是有限集，则 $A-F$ 仍然是一个无限集．

我们现在讨论需要格外小心地详细证明的某些结果．在开始

之前，假定读者已经熟悉实数系．具体地说，假定他们知道正整数集是良序集，也就是说它具有这样的性质：每一个非空的正整数集有最小元素．

我们的第一个结果粗略地说来是，在集合族中最小的集合是可数集．如果要作较细的分类，我们能够说有限集是最小的，在它后面的是可数无限集．下面证明

0.2 定理 一个可数集的任意子集也是可数的．

证明 设 A 是一个可数集且 $B\subseteq A$．如果 B 是有限集，定理的结论显然成立．因此假设 B 是一个无限集．设 f 是在 A 与正整数集 Z^+ 之间的一一对应．按照通常函数的记号，我们用 $f(n)$ 表示 A 中那个与整数 n 对应的元素．设 n_1 是使 $f(n_1)\in B$ 的最小整数．由正整数集的良序性，这样一个整数存在．又，设 n_2 是使 $f(n_2)\in B-\{f(n_1)\}$ 的最小整数．这样继续下去，设 n_k 是使 $f(n_k)\in B-\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}\{f(n_i)\}$ 的最小整数．对于每一个 k，我们注意到集合 $B-\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}\{f(n_i)\}$ 是非空的．因为如果不是这样，我们就已经在正整数集 Z_{k-1} 与 B 之间建立起了一个一一对应，由此得出 B 是一个有限集．这样一来我们在 Z^+ 与 B 之间确定了一一对应 $g(k)=f(n_k)$．这个对应的存在说明 B 是可数集．▌

对我们说来，知道可数个可数集之并也是可数集这一事实是重要的．这个结果叙述如下．

0.3 定理 设 A 是一个可数指标集，对每一个 $\alpha\in A$，有一个对应的可数集合 B_α，则集合 $\bigcup\limits_{\alpha\in A}B_\alpha$ 也是可数的．

证明的前注 由于我们知道可数集的子集是可数的，因此我们不仅能够假设集合 A 是可数无限集，而且同样能够假设每一个 B_α 也是可数无限集．因为如果不是这样（也就是说它们有的是有

限集)，则能够增加一些元素使得有限集扩充成为可数无限集. 因而定理中我们所关心的那个并就成了扩充以后的集合的并的子集. 如果扩充以后的并我们能证明它是可数的，则作为可数集的子集，前者也就是可数的了. 与此类似，我们可以假设所有的 B_α 互不相交(也就是说对于 $\alpha\neq\beta$, $B_\alpha\cap B_\beta=\phi$). 因为如果它们不是这样，我们将公共元素视为相异，这样一来所有 B_α 的全体元素也就可以认为是互不相同的了. 作出它们的并，证明这个集合是可数的. 可以想象，定理中我们所关心的并是将公共元素视为相异的并的子集. 因为可数集的子集总是可数的，这就结束了证明.

证明 由刚才作出的注解，我们假定 A 以及每一个 B_α 都是可数无限集且 B_α 互不相交. 因为 A 是可数无限集，所以在 Z^+ 和 A 之间存在一个一一对应 f. 由此，对于每一个 $\alpha\in A$, 对应了唯一的一个整数 n, 使得 $f(n)=\alpha$. 我们用指标 n 代替指标 α 重新命名集合 B_α 为 B_n, $n=1, 2, \cdots$. 因为每一个 B_n 是可数无限集，故对于每一个 n, 在 Z^+ 与 B_n 之间存在一一对应 f_n. 这样一来，对于每一个 $b\in B_n$, 存在一个唯一的整数 k, 使得 $f_n(k)=b$. 我们用两个指标 n 和 k 来标记元素 b, 将它记为 b_{nk}. 在这种形式下，并 $\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$ 中的每一个元素都被赋予了唯一的一对指标. 下面的图表使得以上论述更清楚：

$$\begin{array}{lllll}
B_1: b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots \\
B_2: b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots \\
B_3: b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{array}$$

现在建立下面的一一对应：

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{13} & b_{22} & b_{31} & b_{14} & b_{23} & b_{32} & b_{41} & b_{15} & b_{24} & b_{33} & b_{42} & b_{51} & b_{16}
\end{array}$$

如此等等. 在上面的对应中，我们将指标之和是2的元素排在第一，然后是指标和是3的元素，再后面是指标和是4的元素，如此等等. 对每一个这样的和(也就是2, 3, 4, …)，使得元素的第一个指标按整数的自然顺序排列. 这样一来，在 Z^+ 与 $\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$ 之间建立起了一个一一对应. 这证明了可数个可数集之并也是可数集. ▮

粗看起来，似乎除可数无限集外再也没有别的无限集合，也就是说每一个无限集必然是可数无限的. 然而事实并不是这样. 对此我们给出0与1之间的实数集是不可数集的一个经典的证明，这个证明属于Cantor. 如果我们假设区间(0, 1)内的实数是可数的，且假定在 Z^+ 与这些数之间已经建立了一个一一对应. 用下面的图来表示这个对应.

$$\begin{array}{lll}
1 \leftrightarrow & .a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14} & \cdots \\
2 \leftrightarrow & .a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24} & \cdots \\
3 \leftrightarrow & .a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34} & \cdots \\
4 \leftrightarrow & .a_{41}\,a_{42}\,a_{43}\,a_{44} & \cdots \\
\cdot & \quad\cdot & \cdots \\
\cdot & \quad\cdot & \cdots \\
\cdot & \quad\cdot & \cdots
\end{array}$$

此处每一个 a_{ij} 表示一个数字，也就是说 $0\leq a_{ij}\leq 9$. 实数的这种十进制表达式有两种形式可供选择. 例如，2/10 能被写作 .2000…或者 .1999…. 我们总是选择以一串0结尾的那种形式. 这个一一对应是这样的：每一个正整数对应于(0, 1)中的某一个实数；相

反，(0, 1)中的每一个实数与某一个正整数相对应．因此，(0, 1)中的每一个实数都将出现在上表的某处，也就是说上面给出的十进制的数表是完全的．现在，如果能够给出不在这个表中的 0 与 1 之间的一个实数，这就会产生矛盾，而这正是我们需要的．按下面的方式定义 $b=.b_1b_2b_3\cdots$：如果 a_{ii} 是 5，设 $b_i=6$；如果 $a_{ii}\neq 5$，则设 $b_i=5$．显然 b 不等于表中的任何一个数，因为它与表中排列在第 n 行的数的第 n 个数字不相同．又显然 $5/9\leqq b\leqq 2/3$，因此 $b\in(0, 1)$．这个矛盾说明在 Z^+ 与 $(0, 1)$ 之间不能存在这样的一一对应．又因为 $(0, 1)$ 包含集合 $\left\{\frac{1}{n}\middle| n=2, 3, \cdots\right\}$，所以它是无限集．因此 $(0, 1)$ 中实数的集合是不可数的．

练　　习

0.23　如果 A 是无限集，$a\in A$，证明 $A-\{a\}$ 是无限集．

0.24　指出以下关于正整数集合 Z^+ 是不可数集的"证明"的漏洞．以通常的方式写出每一个正整数，但在第一个数字之前向左写出无限个 0．例如 17 写作 $\cdots00017$．假若 Z^+ 是可数的，建立一个明显的一一对应 $n\leftrightarrow\cdots000n$．例如 124 与 $\cdots000124$ 对应．以通常的顺序写出数表

$$\cdots0001$$
$$\cdots0002$$
$$\cdots0003$$
$$\text{等等}$$

现在以如下方式作出一个新数：读出这个表中对角线上的各个数字．如果表中第 n 个数在第 n 个位置的数字是 5，设新数在第 n 个位置的数字是 6；如果表中第 n 个数的第 n 个数字不是 5，则设新数的第 n 个数字是 5．这样构成的数的第 n 个数字与表中第 n 个数的第 n 个数字不相同，因

而与表中所有的数都不相同、这说明上面建立的一一对应不象要求的那样是一一对应，因此集合 Z^+ 是不可数集.

§7 关于实数的各种假设

我们假定学生在以往的学习过程中已经熟悉了实数系统. 特别是我们假定他们已经熟悉了下面两种形式的数学归纳法原理.

1. 如果 S 是一个正整数集，且满足
   (a) $1\in S$,
   (b) 由 $k\in S$ 可以得出 $k+1\in S$, 则 $S=Z^+$, 这里 Z^+ 是全体正整数所成的集合.
2. 如果 S 是一个正整数集，而且满足
   (a) $1\in S$,
   (b) 如果对每一个 $k<n$, $k\in S$ 有 $n\in S$, 则 $S=Z^+$, 这里 Z^+ 是全体正整数所成的集合.

我们也假定正整数集是良序集，也就是说 Z^+ 的每一个非空子集包含最小的数. 所谓最小是在实数通常大小顺序意义下的最小.

设 T 是一个实数集，如果对于每一个 $s\in T$ 有 $s\leqq t$, 则称 t 是 T 的一个上界. 如果对于每一个 $s\in T$ 有 $u\leqq s$, 则称 u 是 T 的一个下界. 如果 a 是 T 的上界，而且对于 T 的任意上界 b, 有 $a\leqq b$, 则称 a 是 T 的最小上界或上确界，记为 $\sup T=a$. 与此类似，如果 c 是 T 的下界，而且对于 T 的任意下界 d, 有 $d\leqq c$ 成立，则称 c 是 T 的最大下界或下确界，记为 $\inf T=c$. 我们假定有上界的任意实数集合有上确界，有下界的任意实数集合有下确界.

我们用通常的表达形式表示实数区间如次：

$$(a,\ b)=\{x|x\text{ 是实数},\ a<x<b\}$$

$$[a,\ b)=\{x|x\text{ 是实数},\ a\leqq x<b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid x \text{ 是实数}, a < x \leq b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid x \text{ 是实数}, a \leq x \leq b\}$$

这里 a 与 b 是实数. 我们也自由地使用符号 (a, ∞), (∞, b), $[a, \infty)$, $(\infty, b]$. 这些符号的含意是明显的, 例如

$$(a, \infty) = \{x \mid x \text{ 是实数}, a < x\}.$$

参考书

虽然在书末附有参考书的总目录, 但是在这里还是列出了主要涉及集合论及有关内容的一组书目.

逻辑

1. Christian, R. R., *Introduction to Logic and Sets* (Preliminary ed.; Boston: Ginn, 1958).
2. Rosser, J. B., *Logic for Mathematicians*(New York: McGraw, 1953).
3. Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics* (Princeton, N. J.:Van Nostrand, 1952).

集合

1. Bourbaki, N., *Théorie des Ensembles* (Paris: Actualités Scientifiques et Industrielles, Herman et Cie., 846=1141, 1951).
2. Halmos, P. R., *Naive Set Theory* (Princeton, N. J.:Van Nostrand, 1960).
3. Kamke, E., *Theory of Sets* (New York: Dover, 1950).
4. Suppes, P., *Axiomatic Set Theory* (Princeton, N. J.:Van Nostrand, 1960).

实数系

1. Landau, E., *Foundations of Analysis* (New York: Chelsea, 1951).

历史

1. Cantor, G., *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (New York: Dover, n. d.).

第一章　拓扑空间——基本定义与定理

§1　邻域系与拓扑

当我们回顾数学的发展时，似乎看到两个方向．一个方向是研究各个数学系统算术结构的代数．经典代数，近世代数和数论等等便是纯代数方面的例子．另一个方向是研究数学系统几何特性或空间特性的几何学．欧氏几何，非欧几何，微分几何与拓扑学便是纯几何方面的例子．但是，这样来区分两个方向是比较表面的．因为，事实上数学的全部内容都互相关联，而上面谈到的两个领域有不可分割的联系，以至人们要在任何一个领域内的研究上取得进展，来自另一个领域的概念都是必不可少的．事情可能是这样的，数学中最大的综合发生在分析领域，在这个领域中，代数与拓扑的概念同时影响着数学系统的研究．

我们在这里的目的是研究点集拓扑学．点集拓扑学是若干更高深课题的基础．在这些课题中我们提出三个，并且打算建立一个将使学生继续研究这三个中的任何一个课题的基础．这三个课题是，我们已经谈到过的分析；将扩充本书学习过的内容的高等点集拓扑学以及利用某些代数技巧去进一步研究拓扑空间的代数拓扑学．

因为我们是从集合的空间特征去研究点集拓扑学，所以我们基本上是用几何概念进行思考．这样，所研究的集合中的元素将被称为点，而且用定义的形式将公理引进这个点集．在几何（或拓扑）中，我们主要关心的概念之一是所谓“接近”．也就是说，必须

以某种方式说明一些点靠近另一些点. 我们能够以多种不同的方式导出接近这一概念. 但是,希望寻求一个相当一般的形式,以便将它特殊化后能够得到许多已经熟知的系统. 我们选择的方法是首先定义所考虑集合的点的邻域系的概念。 在某种意义下, 点 x 的邻域是靠近这个点的那些点所成的集合. 从现在开始, 我们用下面的方式定义邻域系:

1.1 定义 设 X 是一个集合, 对每一点 $x\in X$, 设 $\mathscr{U}_x=\{U(x)\}$ 是与 x 相应的 X 的子集所成的非空集族,且满足

(1) 对每一个 $U(x)\in\mathscr{U}_x$ 有 $x\in U(x)$.

(2) 对某一个 $U(x)$, 如果 $V\supseteq U(x)$, 则 $V\in\mathscr{U}_x$.

(3) 如果 U 与 $V\in\mathscr{U}_x$, 则 $U\cap V\in\mathscr{U}_x$.

(4) 如果 $U\in\mathscr{U}_x$, 则存在 $V\in\mathscr{U}_x$ 且满足: 如果 $y\in V$, 则 $U\in\mathscr{U}_y$. 则称 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系.

应当注意到,上面定义的第(4)条中的集合 V 满足 $V\subseteq U$. 看出这一点是容易的. 因为,设 $y\in V$, 则 $U\in\mathscr{U}_y$, 由 1.1 的(1)知 $y\in U$, 所以 $V\subseteq U$.

现在, 对于"接近"一个给定点的那些点(即是邻域)具有怎样的性态我们已经有了一些了解. 当然,我们的邻域概念是非常一般的,它包括了各类奇特情形. 特别是,我们在下面的练习 1.6 中将看到整个集合 X 是自己每一个点的邻域,并且还是唯一的每一个点的邻域. 这些病态的情况不必使我们感到不安, 因为我们将作出进一步的界说,使已知的性质对点的每一个邻域都成立,这样一来, 大部分病态将会消失. 现在我们将一个集合的全部邻域系放在一起去构造一个拓扑空间.

1.2 定义 设 X 是一个集合, 对每一点 $x\in X$, $\mathscr{U}_x$ 是与 x 相应的邻域系. 设 $\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_x|x\in X\}$, 则称偶$(X, \mathscr{T})$为**拓扑空间**, $\mathscr{T}$ 称为空间$(X, \mathscr{T})$的**拓扑**. 如前所述, X 的元素称为点. 如果

$\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_x\}$ 与 $\mathscr{T}'=\{\mathscr{U}'_x\}$ 是 X 的两个拓扑，则 $\mathscr{T}=\mathscr{T}'$ 当且仅当对每一点 $x\in X$ 有 $\mathscr{U}_x=\mathscr{U}'_x$。

事实上，上面定义中的最后一句话是不必要的．因为拓扑仅只是 X 的子集族所成的集合，两个拓扑相等当且仅当它们作为集合相等，也就是必须且只需对每一点 $x\in X$ 有 $\mathscr{U}_x=\mathscr{U}'_x$． 把这一点说得一清二楚是恰当的，因为很可能出现这样的情况，两个拓扑以 X 的相同的子集作为 X 的点的邻域可能很相似，但它们作为拓扑不相等，因为空间的同一个点对应于两个拓扑的两个邻域系可能不相同．下面的例子指出了这个不同．设 $X=\{x, y, z\}$，又设如下确定 $\mathscr{T}$

$$\mathscr{U}_x=\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{x, y, z\}\},$$

$$\mathscr{U}_y=\{\{x, y, z\}\},$$

以及
$$\mathscr{U}_z=\{\{x, y, z\}\}.$$

而 $\mathscr{T}'$ 被如下界定

$$\mathscr{U}_x=\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{x, y, z\}\},$$

$$\mathscr{U}_y=\{\{x, y\}, \{x, y, z\}\},$$

以及
$$\mathscr{U}_z=\{\{x, y, z\}\}.$$

考查 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}'$，它们是相似的，因为它们恰以 X 的相同的子集作为邻域．但是它们不是相同的拓扑，因为在 $\mathscr{T}$ 中 $\{x, y\}$ 是 x 的邻域而不是 y 的邻域，而在 $\mathscr{T}'$ 中 $\{x, y\}$ 既是 x 的邻域又是 y 的邻域．

通常较方便的是只说 X 是一个拓扑空间，而不提及它的拓扑 $\mathscr{T}$，也不用记号$(X, \mathscr{T})$．因为我们对于一个特殊的拓扑的兴趣多半不那么大，感兴趣的是任意的拓扑都具有的性质．因此我们以后将不特别提到拓扑，除非强调某个特殊的拓扑或者区分不同的拓扑对上下文是重要之时。

例子（和练习）

每一个例子都是习题，例子中的断言应当作为习题来证明.

1.1　设 R 是实直线，定义 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$，定义

$\mathscr{U}_x=\{U \mid$ 对某两个 $a, b \in R,\ a<b$，有 $x \in(a, b) \subseteq U\}$，

则 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系．根据 1.2 它产生 R 上的一个拓扑，这个拓扑称为 $\boldsymbol{R}$ **的寻常拓扑**.

注　下面练习 1.2 中的函数 ρ 以及练习 1.4 中定义的函数

$$\rho(f, g)=\int_0^1|f-g| d x$$

实质上是度量，我们将在第五章详细地讨论它．目前，学生应当注意并能自由地运用度量的下述性质：

(a) $\rho(x, x)=0$　对空间内的每一点 x 成立.

(b) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$　对空间内任意的 x, y 成立.

(c) $\rho(x, y) \leqq \rho(x, z)+\rho(z, y)$　对空间内任意的 x, y, z 成立.

1.2　设 $E=R \times R$，其中 R 是实直线，也就是说 E 是实平面．设 $x, y \in E$，其中 $x=(a, b),\ y=(c, d)$．定义

$$\rho(x, y)=\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right]^{1/2}.$$

称 $\rho(x, y)$ 为 x, y 之间的距离．定义

$$S_\varepsilon(x)=\{y \mid \rho(x, y)<\varepsilon\}.$$

$S_\varepsilon(x)$ 称为 x 处的开 ε-球．最后，定义

$$\mathscr{U}_x=\{U \mid \text{对某个 } \varepsilon>0,\ U \supseteq S_\varepsilon(x)\},$$

则 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系．根据 1.2，它产生一个拓扑，这个拓扑称为**平面的寻常拓扑**.

1.3　设 X 是在某个序"$\leqq$"下的偏序集，也就是说 (α) 若 $x \leqq y$ 与 $y \leqq z$ 成立，则 $x \leqq z$ 成立，(β) 若 $x \leqq y$ 与 $y \leqq x$ 成立，则 $x=y$，(γ) 对所有 $x \in X$ 有 $x \leqq x$．定义 $S_r(x)=\{y \mid x \leqq y\}$，$\mathscr{U}_x=\{U \mid U \supseteq S_r(x)\}$，则 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系．根据 1.2，X 上这

样定义的拓扑 $\mathscr{T}$ 称为 X 的**右序拓扑**. 类似地, 从集合 $S_l(x)=\{y|y\leq x\}$ 着手也能够定义左序拓扑.

1.4 设 X 是定义在区间 $[0,1]$ 上的所有实值可积函数所成的集合. 对 $f\in X$, 定义

$$S_\varepsilon(f)=\{g|g\in X,\ \int_0^1|f-g|dx<\varepsilon\},$$

又定义 $\mathscr{U}_f=\{U|$对某个 $\varepsilon>0,\ U\supseteq S_\varepsilon(f)\}$.

则 $\mathscr{U}_f$ 是 f 的邻域系. 由 1.2 可知这样的邻域系产生一个拓扑.

1.5 设 X 是一个集合, 对每一点 $x\in X$, 设 $\mathscr{U}_x=\{U|x\in U\}$. 则 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系, 这样产生的拓扑称为 X 的**离散拓扑**.

1.6 设 X 是一个集合, 对每一点 $x\in X$, 设 $\mathscr{U}_x=\{X\}$. 则 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系. 这样产生的拓扑称为 X 的**平庸拓扑**.

1.7 设 X 是一个集合, $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}'$ 是 X 的两个拓扑. 则 $\mathscr{T}=\mathscr{T}'$ 当且仅当对每一点 $x\in X$ 及每一个 $U\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$, 存在 $U'\in\mathscr{U}'_x\in\mathscr{T}'$, 使得 $U'\subseteq U$; 并且对每一个 $V'\in\mathscr{U}'_x\in\mathscr{T}'$, 存在 $V\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$, 使得 $V\subseteq V'$.

§2 拓扑空间中的开集

下面的定义和两个定理介绍拓扑空间的开集族. 空间的这些特别的子集在空间的拓扑中起着重要的作用.

1.8 定义 设 X 是一个拓扑空间, 集合 $O\subseteq X$. 如果对每一点 $x\in O$ 都有 $O\in\mathscr{U}_x$, 则称 O 是一个**开集**. 空间 X 的开集族用 $\mathscr{O}$ 表示.

1.9 定理 设 X 是一个拓扑空间, 则 U 是 $x\in X$ 的邻域(也就是 $U\in\mathscr{U}_x$)当且仅当存在 $O\in\mathscr{O}$(也就是说 O 是 X 的开集), 使得 $x\in O\subseteq U$.

证明 (1) 设 U 是 x 的邻域, 又设

$$O=\{y \mid \text{存在 } W\in\mathscr{U}_y,\ W\subseteq U\}.$$

我们首先注意到，因为 $U\in\mathscr{U}_x$ 以及 $U\subseteq U$，所以 $x\in O$．现在设 $y\in O$，则由 O 的定义知，存在 $W\in\mathscr{U}_y$ 使得 $W\subseteq U$．又由 1.1(4)，存在 $V\in\mathscr{U}_y$，使得若 $z\in V$ 便有 $W\in\mathscr{U}_z$，且前面已经指出 $V\subseteq W$．这样一来对每一个 $z\in V$ 我们有 $z\in W\subseteq U$ 且 $W\in\mathscr{U}_z$，因此 $z\in O$，从而 $V\subseteq O$．但我们已有 $V\in\mathscr{U}_y$ 且 $V\subseteq O$，因此由 1.1(2) 有 $O\in\mathscr{U}_y$．根据 1.3，O 是开集．

(2) 设 $x\in X$，$O\in\mathscr{O}$ 且 $x\in O\subseteq U$．由 1.3 有 $O\in\mathscr{U}_x$，根据 1.1(2) 得 $U\in\mathscr{U}_x$．▌

1.5 定理 设 X 是一个拓扑空间．则

(1) 任意个开集之并是开的．

(2) 任意两个(从而任意有限个)开集之交是开的．

(3) X 是开的．

(4) ϕ 是开的．

证明 (1) 设 A 是一个指标集，而且对于每一个 $\alpha\in A$，O_α 是开集．又设 $O=\bigcup\limits_{\alpha\in A}O_\alpha$．对 $x\in O$ 存在某一个 α，使得 $x\in O_\alpha$．因为 O_α 是开的，故 $O_\alpha\in\mathscr{U}_x$．又因为 $O_\alpha\subseteq O$，根据 1.1(2) 知 $O\in\mathscr{U}_x$，再由 1.3 便可以得出 O 是开的．

(2) 设 O_1 与 O_2 是开的，$O=O_1\cap O_2$ 及 $x\in O$．由于 $x\in O_1$ 及 $x\in O_2$，又因为 O_1 与 O_2 是开集，所以 $O_1\in\mathscr{U}_x$ 与 $O_2\in\mathscr{U}_x$ 同时成立．根据 1.1(3)，$O=O_1\cap O_2\in\mathscr{U}_x$，所以根据 1.3 可知 O 是开集．

(3) 设 $x\in X$，则 $\mathscr{U}_x\neq\phi$，所以存在 $U\in\mathscr{U}_x$．因为 $U\subseteq X$，由 1.1(2) 有 $X\in\mathscr{U}_x$．根据 1.3 知 X 是开的．

(4) 如果 ϕ 不是开集，则应当存在 $x\in\phi$，使得 $\phi\notin\mathscr{U}_x$．然而，这样的 x 是不存在的(ϕ 是空集)．这是一个明显的错误．所以 ϕ 是开集．▌

在一个集合上引入拓扑的时候，我们是从邻域概念着手的．这

仅是达到同一个目的的许多途径之一. 同样, 我们也可以从开集概念着手以稍微不同的方式引出拓扑. 下一个定理就说明了这一点.

1.6 定理 设 X 是一个集合, 又设存在 X 的子集所成的集族 $\mathcal{O}$, 使得

(1) $\mathcal{O}$ 中任意个集合之并在 $\mathcal{O}$ 中.

(2) $\mathcal{O}$ 中任意两个(从而任意有限个)集合之交也在 $\mathcal{O}$ 中.

(3) $X\in\mathcal{O}$.

(4) $\phi\in\mathcal{O}$.

则有一种且只有一种方式导出 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$, 使得 $\mathcal{O}$ 中的集合是拓扑 $\mathcal{T}$ 的开集, 这时我们称集族 $\mathcal{O}$ 产生 $\mathcal{T}$.

证明 对每一个 $x\in X$, 定义

$$\mathcal{U}_x=\{U\,|\,对于某个\ O\in\mathcal{O},\ x\in O\subseteq U\}.$$

我们证明 $\mathcal{U}_x$ 是 x 的邻域系.

(1) 根据(3), $X\in\mathcal{U}_x$, 故 $\mathcal{U}_x\neq\phi$. 又对于每一个 $U\in\mathcal{U}_x$ 都有 $x\in O\subseteq U$, 所以 $x\in U$.

(2) 设 $U\in\mathcal{U}_x$ 且 $U\subseteq V$, 则存在 $O\in\mathcal{O}$, 使得 $x\in O\subseteq U\subseteq V$, 所以 $V\in\mathcal{U}_x$.

(3) 如果 U, $V\in\mathcal{U}_x$, 则存在 O_1, $O_2\in\mathcal{O}$, 使得 $x\in O_1\subseteq U$, $x\in O_2\subseteq V$. 由(2), $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$, 又 $x\in O_1\cap O_2\subseteq U\cap V$, 因此 $U\cap V\in\mathcal{U}_x$.

(4) 设 $U\in\mathcal{U}_x$, 则存在 $O\in\mathcal{O}$, 使得 $x\in O\subseteq U$. 我们注意到 $O\in\mathcal{U}_x$. 设 $V=O$, 则对 $y\in V$, 有 $y\in V=O\subseteq U$, 所以 $U\in\mathcal{U}_y$.

由此, $\mathcal{U}_x$ 满足定义 1.1 的条件, 所以 $\mathcal{U}_x$ 是 x 的邻域系.

我们现在证明 $\mathcal{O}$ 是由拓扑 $\mathcal{T}=\{\mathcal{U}_x|x\in X\}$ 产生的开集所成的集合. 设 $O\in\mathcal{O}$, $x\in O$, 则由 $\mathcal{U}_x$ 的定义有 $O\in\mathcal{U}_x$. 因此对每一个 $x\in O$ 都有 $O\in\mathcal{U}_x$, 所以 O 在拓扑 $\mathcal{T}$ 中是开的. 反之, 设 U 是

拓扑 $\mathscr{T}$ 中的开集，则对每一个 $x\in U$ 都有 $U\in\mathscr{U}_x$，由 $\mathscr{U}_x$ 的定义存在 $O_x\in\mathscr{O}$，使得 $x\in O_x\subseteq U$ 成立．显然 $U=\bigcup_{x\in U}O_x$，由(1)的假设有 $U\in\mathscr{O}$．

最后我们必须证明拓扑 $\mathscr{T}$ 被唯一地决定．因为根据 1.4，U 是 x 的邻域当且仅当存在开集 O，使得 $x\in O\subseteq U$．显然，除了上面选择的方式之外没有别的方式能够定义 $\mathscr{U}_x$．▌

应当注意，$\mathscr{O}$ 以一种十分明确的方式产生了拓扑 $\mathscr{T}$，也就是说对给出的集族 $\mathscr{O}$ 以及每一点 $x\in X$，定义

$$\mathscr{U}_x=\{U\,|\,U\subseteq X,\text{ 对某个 } O\in\mathscr{O} \text{ 有 } x\in O\subseteq U\}.$$

这样，满足 1.6 的四个条件的任意集族 $\mathscr{O}$ 唯一地决定了一个拓扑 $\mathscr{T}$．如果愿意，我们也可以简单地将集族 $\mathscr{O}$ 定义为空间的拓扑，而通常正是这样作的．应当向学生指出，在阅读其它拓扑学著作的时候，不要被一个空间的拓扑的另一个等价的定义迷惑．我们之所以选择由邻域系定义拓扑，为的是尽可能多地保留几何的特色．

例子(和练习)

1.8　在实直线上设 $\mathscr{O}$ 是由任意个形如 (a, b)（这里 $a<b$）的开区间的并的全体形成的集族，则 $\mathscr{O}$ 产生实直线上的寻常拓扑．

1.9　在实平面上设 $\mathscr{O}$ 是任意个开球的并的全体形成的集族，则 $\mathscr{O}$ 产生平面的寻常拓扑．

1.10　X 是偏序集，设 $\mathscr{O}$ 是任意个 $S_r(x)$（$x\in X$，参看练习 1.3）的并的全体形成的集族，则 $\mathscr{O}$ 产生 X 的右序拓扑．

1.11　在定义在区间 $[0, 1]$ 上的所有可积实值函数所成的集合上设 $\mathscr{O}$ 是任意个 $S_\varepsilon(f)$（$\varepsilon>0$，f 是 $[0, 1]$ 上可积的实函数）的并的全体形成的集族，则 $\mathscr{O}$ 产生练习 1.4 中的拓扑．

1.12　在非空集合 X 上设 $\mathscr{O}$ 是 X 的所有子集所成的集族，则 $\mathscr{O}$ 产生 X 的离散拓扑．

1.13 在非空集合 X 上设 $\mathscr{O}$ 是集族 $\{X, \phi\}$，则 $\mathscr{O}$ 产生 X 的平庸拓扑.

§3 极限点和导集

因为对分析的研究在某种程度上依赖于被研究的函数的定义域空间与值域空间的空间结构，也就是说依赖于某种拓扑的考虑.因此，拓扑与分析的某些概念有关，特别是与极限过程有关就并不奇怪了. 当我们研究实函数的极限或序列极限的时候，函数(或序列)的极限在某种意义下任意接近函数(或序列)的值. 下面我们用极限点的概念将这一观点推广.

1.7 定义 设 X 是一个拓扑空间，$A\subseteq X$. 如果对每一个 $U\in\mathscr{U}_x$，$U\cap A$ 包含异于 x 的点 y，称点 $x\in X$ 为 A 的一个极限点.

例子(和练习)

1.14 在具有寻常拓扑的实直线上，a 与 b 都是开区间 (a, b) 的极限点.

1.15 在具有寻常拓扑的实平面上，形如 $(0, y)$ 的点是集合 $D=\{(x, y)\mid x>0\}$ 的极限点.

1.16 在偏序集 X 的右序拓扑中，如果 $x\in X$ 不是 X 的最小元(也就是说 $x\leqq y$ 不可能对所有的 $y\in X$ 成立)，则任意一个 $y<x$ 都是集合 $S_r(x)$ 的极限点.

1.17 在 $[0, 1]$ 上的所有可积函数所成的集合上，有如同练习 1.4 所定义的拓扑. 设

$$Y=\left\{f\mid\int_0^1 f dx\neq 0\right\}.$$

设 $x\neq 1$ 时 $g(x)=0$ 及 $g(1)=1$. 则 g 是 Y 的极限点. 事实上，如果一个函数仅对有限个 $x\in[0, 1]$ 有异于 0 的值，则这个函数是 Y 的一个极限点.

1.18 如果 X 是具有离散拓扑的非空集合，设 $A\subseteq X$，$x\in X$，则 x 不是 A 的极限点.

1.19 X 是至少包含两个元素的集合并且具有平庸拓扑. 设 $A\subseteq X$，$x\in X$. 则 x 是 A 的极限点，除非 $A=\phi$ 或者 $A=\{x\}$ 时这个结论才不成立.

1.8 定义 设 X 是一个拓扑空间且 $A\subseteq X$. 称 A 的所有极限点所成的集合为 $\boldsymbol{A}$ **的导集**，记为 A'.

例子（和练习）

1.20 在具有寻常拓扑的实直线上，设 $A=(a, b)$，则 $A'=[a, b]$. 设 $B=\{x|0<x\leqq 1$ 或 $x=2\}$，则 $B'=[0, 1]$.

1.21 在具有寻常拓扑的实平面上设 $D=\{(x, y)|x>0\}$，则 $D'=\{(x, y)|x\geqq 0\}$. 设 $E=\{(x, y)|x, y$ 是整数$\}$，则 $E'=\phi$.

1.22 设 X 是具有右序拓扑的偏序集，$A=\{x\}$，则 $A'=\{y|y<x\}$.

1.23 在任意拓扑空间中都有 $\phi'=\phi$.

1.24 在任意拓扑空间中，如果 $A\subseteq B$，则 $A'\subseteq B'$.

§4 集合的闭包

在上一节内我们从拓扑空间 X 的任意一个集合 A 着手，由它导出了一个新的集合 A'，也就是 A 的所有极限点所成的集合. 这样一来将 A 与 A' 的点放在一起构造一个新的集合也就是自然的了. 这正是我们下面要作的.

1.9 定义 设 X 是拓扑空间，$A\subseteq X$. 称集合 $A\cup A'$ 是 $\boldsymbol{A}$ **的闭包**，记为 $\overline{A}$.

例子(和练习)

1.25 在具有寻常拓扑的实直线上设 $A=(a, b)$，则 $\overline{A}=[a, b]$。设 $B=\{x|0<x\leqq 1 或 2\}$，则

$$\overline{B}=\{x|0\leqq x\leqq 1 \quad 或 \quad x=2\}.$$

1.26 在具有寻常拓扑的实平面上设 $D=\{(x, y)|x>0\}$，则 $\overline{D}=\{(x, y)|x\geqq 0\}$. 设 $E=\{(x, y)|x 与 y 是整数\}$，则 $\overline{E}=E$.

1.27 设 X 是具有右序拓扑的全序集且 $A=S_r(x)$，则 $\overline{A}=X$.

1.28 设 X 是具有离散拓扑的非空集合且 $A\subseteq X$，则 $\overline{A}=A$.

1.29 设 X 是具有平庸拓扑的非空集合且 $A\subseteq X$，则除 $A=\phi$ 外都有 $\overline{A}=X$.

1.30 在任何拓扑空间中都有 $\overline{\phi}=\phi$.

1.31 在任何拓扑空间 X 中都有 $\overline{X}=X$.

1.32 在任意拓扑空间 X 中，设 $A\subseteq X$，则 $A\subseteq\overline{A}$.

1.33 在任意拓扑空间 X 中，$x\in\overline{A}$ 当且仅当对每一个 $U\in\mathscr{U}_x$ 都有 $U\cap A\neq\phi$.

一个拓扑空间 X 中的集合 A 的闭包具有许多有趣的性质. 其中有下述意义下的最大性：向 $\overline{A}$ 添加 $\overline{A}$ 的极限点不会得出更大的集合. 这可由下面定理说明.

1.10 定理 设 X 是一个拓扑空间，$A\subseteq X$，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

证明 由1.9有 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}\cup\overline{A}'$. 现在证明 $\overline{A}'\subseteq\overline{A}$. 设 $x\in\overline{A}'$，若 $x\notin\overline{A}=A\cup A'$，则 $x\notin A$ 且 $x\notin A'$. 这样，就存在 $U\in\mathscr{U}_x$ 使得 $U\cap A=\phi$. 取开集 O，使得 $x\in O\subseteq U$，则 $O\in\mathscr{U}_x$，又因为 $O\cap A\subseteq U\cap A=\phi$，所以 $O\cap A=\phi$. 因为 $x\in\overline{A}'$，故 $O\cap\overline{A}$ 包含某一个点 $y\neq x$. 由此 $y\in\overline{A}$，又因为 $O\cap A=\phi$，从而 $y\in A'$. 因为 O 是开集，由1.3有 $O\in\mathscr{U}_y$，所以存在 $z\neq y$ 且 $z\in O\cap A$. 这与 $O\cap A=\phi$ 矛盾. 所以 $x\in\overline{A}$. 这就证明了 $\overline{A}'\subseteq\overline{A}$. 最后，由于 $\overline{A}'\subseteq\overline{A}$，所以

$\overline{\overline{A}}=\overline{A}\cup\overline{A}'=\overline{A}$. ∎

集合的并与交同它们的闭包之间有许多关系. 同时, 与此相似的某些特殊性质不仅与交、并、闭包的性质有关, 而且还依赖于所考虑的集合是否是开集. 这种类型的较为重要和有用的几个结果给在下面的两个定理中.

1.11 定理 设 X 是拓扑空间, $A\subseteq X$, $B\subseteq X$. 则

(1) 如果 $A\subseteq B$ 则 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

(2) $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证明 (1) 由练习 1.24, 如果 $A\subseteq B$, 则 $A'\subseteq B'$. 从而 $\overline{A}=A\cup A'\subseteq B\cup B'=\overline{B}$.

(2) 设 $x\in\overline{A\cap B}$, 又设 $U\in\mathscr{U}_x$, 则 $U\cap(A\cap B)\neq\phi$. 因此 $U\cap A$ 与 $U\cap B$ 都不是空集, 故有 $x\in\overline{A}$ 与 $x\in\overline{B}$, 因此 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. 这说明 $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

(3) 因为 $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$, 由这个定理的第一部分我们有 $\overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}$ 与 $\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$, 因此 $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$. 现在设 $x\in\overline{A\cup B}$ 并且设 $x\notin\overline{A}$, $x\notin\overline{B}$, 则存在 U, $V\in\mathscr{U}_x$, 使得 $U\cap A=\phi$, $V\cap B=\phi$. 因为 $U\cap V\in\mathscr{U}_x$ 且

$$\begin{aligned}U\cap V\cap(A\cup B)&=(U\cap V\cap A)\cup(U\cap V\cap B)\\&\subseteq(U\cap A)\cup(V\cap B)=\phi,\end{aligned}$$

这与 $x\in\overline{A\cup B}$ 矛盾. 因此, 或 $x\in\overline{A}$, 或 $x\in\overline{B}$, 即 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. 所以 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$. 因此最后有 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. ∎

1.12 定理 设 X 是一个拓扑空间, $A\subseteq X$ 是开集, 又设 $B\subseteq X$. 则 $A\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$.

证明 设

$$x\in A\cap\overline{B}=A\cap(B\cup B')=(A\cap B)\cup(A\cap B').$$

如果 $x\in A\cap B$, 则

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap B)'=\overline{A\cap B}.$$

如果 $x\in A\cap B'$, 因为 $A\in\mathscr{U}_x$, 则对 $U\in\mathscr{U}_x$ 有 $A\cap U\in\mathscr{U}_x$(根据 1.1(3)). 又因 $x\in B'$, 故 $(A\cap U)\cap B$ 包含点 $y\neq x$. 这样一来对每一个 $U\in\mathscr{U}_x$, $U\cap(A\cap B)=(A\cap U)\cap B$ 都包含点 $y\neq x$, 所以

$$x\in(A\cap B)'\subseteq\overline{A\cap B}.$$

在任何一种情况下都有 $x\in\overline{A\cap B}$, 因此 $A\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$. ▮

练　　习

1.34　在实直线上作出一个例子使得 A 是开集且 $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}$ 互不相同. 再作出一个例子使 A 不是开集并且 $A\cap\overline{B}\nsubseteq\overline{A\cap B}$.

§5　闭　　集

是不是存在包含自己所有极限点的集合? 这样的集合是否有一些有趣的、有特色的性质? 此时提出这些问题看来是合理的. 当然, 我们已经知道有包含自己所有极限点的集合. 由 1.10 可知 $\overline{A}$ 就是这样的集合. 我们现在着手研究这类集合的某些性质. 为了给这样的集合确定一个名称, 首先介绍下面的定义.

1.13 定义　设 X 是一个拓扑空间, $A\subseteq X$, 如果 $A=\overline{A}$, 则称 A 是闭的.

这个定义看来无可非议, 但它却是某种困难的根源. 对于定义中所描绘的那一类集合, 选用"闭"一词给予命名可能会导致误解, 因为人们在直觉上把"开"与"闭"两个概念视为非此即彼的对立概念, 好象门不是开着便是关着一样. 对于拓扑空间内的集合, 情况却并非如此. 作个比喻, 我们将开集和闭集想象为类似于拥有汽车的权利. 这个权利对于每一个人都是开放的, 但仍然有某些大专院校禁止学生拥有汽车, 这个权利对这些学生来说是"闭的"(即

没有拥有汽车的权利). 所以这个权利同时既是开(放)的又是(封)闭的. 集合的情况也是这样, 即是说开与闭并不互相排斥. 一个集合可能同时又是开集又是闭集, 也可能是开而不闭, 也可能是闭而不开, 也可能既不开又不闭. 在具有寻常拓扑的实直线上, 这些情况全都出现. 全空间 R 是既开又闭的(空集也是这样), 对 $a<b$, 区间 (a, b) 开而不闭, 区间 $[a, b]$ 闭而不开, 区间 $[a, b)$ 既不开又不闭. 当然, 读者应当自己证实以上各点.

在继续研究闭集的性质之前我们还想多说几句. 循着前面一段的考虑, 我们知道如果打算证明一个集合是闭的, 则证明它不是开集对我们没有任何用处, 因为我们已经由例子看到一个集合能够同时具有这两个性质. 自然, 如果打算证明一个集合是开的, 则证明它不是闭集对我们同样也没有任何用处.

注意到下述事实也是有用的. 在任何一个空间中, ϕ 和 X(全空间)必然是既开又闭的. 在这方面我们来推测一下: 假如在一个空间内 ϕ 和 X 是唯一的同时既开又闭的两个集合, 这个空间应该具有什么性质. 这的确是一个有趣的问题, 但是可能提得早了一点(参看 4.3).

由 1.10 可以看出一个集合的闭包是闭的, 这自然是一个令人十分满意的结论. 但更好的一个事实是, 虽然开与闭不是非此即彼的两个对立概念, 但开集与闭集有下面定理所述的相互关系.

1.14 定理 在一个拓扑空间中, 集合 A 是闭集当且仅当 A 的余集 A^c 是开集.

证明 设 A 是闭集, 又设 $x\in A^c$. 因为 $x\notin A=\overline{A}$, 故如练习 1.33 所示, 存在邻域 $U\in\mathscr{U}_x$, 使得 $U\cap A=\phi$, 从而 $U\subseteq A^c$. 根据 1.1(2) 有 $A^c\in\mathscr{U}_x$. 根据 1.3, A^c 是开的.

反之, 设 A^c 是开的且 $x\in\overline{A}$. 假若 $x\in A^c$, 则由 1.3 有 $A^c\in\mathscr{U}_x$. 由练习 1.33 有 $A^c\cap A\neq\phi$. 这显然是一个矛盾. 因此 $x\in A$,

从而 $\overline{A}\subseteq A$. 又因为对任意集合都有 $A\subseteq\overline{A}$, 从而 $A=\overline{A}$, 所以 A 是闭集. ▌

由DeMorgan公式及直接应用这个定理可以得出下面的推论.

1.15 推论 在任意拓扑空间中

(1) 任意个闭集之交是闭的,

(2) 任意两个(从而任意有限个)闭集之并是闭的.

证明 (1) 设 $\varDelta$ 是指标集, 且对每一个 $\alpha\in\varDelta$, 设 C_α 是闭的. 又设 $C=\bigcap\limits_{\alpha\in\varDelta}C_\alpha$, 则

$$C^c=(\bigcap_{\alpha\in\varDelta}C_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in\varDelta}C_\alpha^c,$$

根据 1.14, 每一个 C_α^c 是开的, 由 **1.5** 得出 $\bigcup\limits_{\alpha\in\varDelta}C_\alpha^c$ 也是开的. 这样一来 C^c 是开的, 再根据 1.14, C 是闭的.

(2)的证明留作一个简单的练习. ▌

后面的练习需要如下两个定义. 在每一个定义中假定了某个包含有关集合的拓扑空间的存在.

1.16 定义 (1) 使 $A\in\mathscr{U}_x$ 的所有点 x 所成的集合称为 **A 的内部**, 记为 $\mathring{A}$(或 A°).

(2) 集合 $\overline{A}\cap\overline{A^c}$ 称为 **A 的边界**, 记为 $\mathrm{Fr}(A)$.

1.17 定义 如果 $\overline{A}\supseteq B$, 则称**集合 A 在集合 B 内稠密**. 如果 A 在整个空间 X 内稠密, 则称 A 处处稠密, 在不会产生误解的情况下简称稠密.

练　　习

1.35 证明 $\mathring{A}$ 是开集. 事实上它是包含在 A 内的最大开集, 也就是说, 如果 B 是开集而且 $B\subseteq A$, 则 $B\subseteq\mathring{A}$.

1.36 证明 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集, 也就是说, 如果 B 是闭集而且 $B\supseteq A$, 则 $B\supseteq\overline{A}$. 上面两个练习说明人们本来可以将

A 的内部定义为包含在 A 内的所有开集之并，将 A 的闭包定义为包含 A 的所有闭集之交.

1.37 在具有寻常拓扑的实直线上作出集合 A，使它仅经过求余集与求闭包两种运算便能得出十四个互不相同的集合. 更一般地，证明在任意拓扑空间中由一个给定的集合仅经过求余集与求闭包两种运算最多能得到十四个互不相同的集合.

1.38 证明

(a) $\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Fr}(A^c)$,

(b) $\mathrm{Fr}(\overline{A})\subseteq\mathrm{Fr}(A)$, $\mathrm{Fr}(\mathring{A})\subseteq\mathrm{Fr}(A)$,

(c) $\mathrm{Fr}(A\cup B)\subseteq\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)$,

给出例子说明在(b)与(c)中包含关系能够是集合真包含关系.

1.39 如果 A 与 B 是开集，证明

$$[A\cap\mathrm{Fr}(B)]\cup[B\cap\mathrm{Fr}(A)]\subseteq\mathrm{Fr}(A\cap B)$$
$$\subseteq[A\cap\mathrm{Fr}(B)]\cup[B\cap\mathrm{Fr}(A)]\cup[\mathrm{Fr}(A)\cap\mathrm{Fr}(B)].$$

1.40 如果 A 是闭集，证明 $B\cap\mathrm{Fr}(A)\subseteq\mathrm{Fr}(A\cap B)$.

1.41 证明

$$\mathrm{Fr}(A)=\{x\mid x\notin\mathring{A}\quad 且\quad x\notin\widehat{A^c}^{\circ}\}$$
$$=\{x\mid x 既不在 A 的内部，也不在 A^c 的内部\}.$$

1.42 证明 1.15(2).

1.43 如果 X 具有离散拓扑，求证 $\{x\}\in\mathscr{U}_x$. 如果 X 具有离散拓扑而且 $A\subseteq X$，问集合 $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$是什么形式？

1.44 设 X 是一个集合，又设

$$\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_x\mid x\in X\}\quad 与\quad \mathscr{T}'=\{\mathscr{U}'_x\mid x\in X\}$$

是 X 的两个拓扑. 设 $\mathscr{O}$ 与 $\mathscr{O}'$ 分别是由 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}'$ 决定的两个开集族.

(a) 证明 $\mathscr{T}=\mathscr{T}'$ 当且仅当对于每一个 $x\in X$ 以及每一个

$U\in\mathscr{U}_x$ 都存在 $O'\in\mathscr{O}'$，使得 $x\in O'\subseteq U$ 而且对于每一个 $U'\in\mathscr{U}'_x$ 都存在 $O\in\mathscr{O}$，使得 $x\in O\subseteq U'$.

(b) 证明 $\mathscr{T}=\mathscr{T}'$ 当且仅当 $\mathscr{O}=\mathscr{O}'$.

1.45 设 X 是一个集合，且对每一个 $A\subseteq X$ 有另一个集合 $\overline{A}\subseteq X$ 与之相对应并且满足

I 对任意 A, $B\subseteq X$ 有 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

II 如果 $A=\phi$ 或者 A 是由单独一个点组或的集合，则 $\overline{A}=A$.

III 对任意集合 $A\subseteq X$ 有 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

试证明下列各点：

(1) 由 $A\subseteq B$ 可以得出 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

(2) $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

(3) $\overline{A}-\overline{B}\subseteq\overline{A-B}$.

(4) $\overline{\bigcap_{\gamma\in C}A_\gamma}\subseteq\bigcap_{\gamma\in C}\overline{A}_\gamma$，其中 C 是某个指标集.

(5) $\overline{\bigcup_{\gamma\in C}A_\gamma}\supseteq\bigcup_{\gamma\in C}\overline{A}_\gamma$.

(6) 如果 A 是有限集，则 $\overline{A}=A$.

(7) 对于每一个 $A\subseteq X$ 有 $A\subseteq\overline{A}$.

(8) $\overline{X}=X$.

(9) 如果 $A=\overline{A}$，定义 A 是闭集．则 X 是以如下 $\mathscr{O}$ 为开集族的拓扑空间

$$\mathscr{O}=\{O\mid O=A^c,\text{ 其中 } A \text{ 是闭的，也就是 } A=\overline{A}\}.$$

在这样定义的拓扑空间中(参看 1.6)，集合 $A\subseteq X$ 的闭包正好是 $\overline{A}$.

1.46 用适当的例子说明导集 A' 不必是闭的．[提示：设 $X=\{x, y, z\}$，$\mathscr{O}=\{\phi, \{x, y\}, \{z\}, X\}$，$A=\{x\}$.]

§6 子 空 间

1.18 定义 设 X 是一个拓扑空间，$Y\subseteq X$．对每一个 $y\in Y$，

用 $\mathscr{V}_y=Y\cap\mathscr{U}_y$ 定义 Y 中的邻域系 $\mathscr{V}_y$，也就是说 $V\in\mathscr{V}_y$ 当且仅当对某个 $U\in\mathscr{U}_y$ 有 $V=Y\cap U$，此处 $\mathscr{U}_y$ 是 X 中 y 的邻域系. 拓扑 $\mathscr{T}'=\{\mathscr{V}_y|y\in Y\}$ 称为 **X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 在 Y 上的诱导拓扑**，或更通常地，称为 **Y 在 X 内的相对拓扑**，$(Y,\mathscr{T}')$称为 X 的子空间.

在这个定义中，注意到空间 X 的子集 Y 不一定是一个子空间这一点是重要的. 只有当 Y 的拓扑与诱导(或相对)拓扑一致的时候 Y 才被称为子空间. 但是上面的定义是不完全的，因为在那里只是断言(而没有证明)$\mathscr{V}_y$ 是邻域系. 读者应当习惯于此时自己去证明 $\mathscr{V}_y$ 满足 1.1 的条件.

例子(和练习)

1.47 设 R 是具有寻常拓扑的实直线，E 是具有寻常拓扑的实平面，则 R 是 E 的子空间，也就是说，E 上的寻常拓扑诱导出 $R=\{(x, y)\,|\,(x, y)\in E,\ y=0\}$ 上的寻常拓扑.

1.48 设 X 和 Y 是非空集合，$Y\subseteq X$，则 X 上的离散拓扑诱导出 Y 上的离散拓扑；X 上的平庸拓扑诱导出 Y 上的平庸拓扑.

1.49 设 $N=\{(x, y)\,|\,x,\ y$ 是实数，$y\geqq 0\}$，也就是说，N 是闭的上半实平面. 又设

$$N^\circ=\{(x, y)\,|\,x,\ y \text{ 是实数},\ y>0\}.$$

如果 $y>0$，对 $(x, y)\in N$ 定义 $\mathscr{V}_{(x,y)}=\mathscr{U}_{(x,y)}\cap N$，其中 $\mathscr{U}_{(x,y)}$ 是实平面的寻常拓扑在点(x, y)的邻域系. 如果 $y=0$，定义

$$\mathscr{V}_{(x,y)}=\{V\,|\,V\supseteq(U\cap N^\circ)\cup\{(x, y)\}\},$$

这里 $U\in\mathscr{U}_{(x,y)}$. 令

$$\mathscr{T}=\{\mathscr{V}_{(x,y)}\,|\,(x, y)\in N\},$$

则$(N, \mathscr{T})$是一个拓扑空间. 但 N 不是具有寻常拓扑的实平面的子空间，具有寻常拓扑的实直线也不是 N 的子空

间. 具有离散拓扑的实直线是 N 的子空间,在这里我们认为实直线是集合 $R=\{(x, y)\,|\,y=0\}$.

如果 X 是一个拓扑空间, Y 是 X 的子空间, $O\subseteq Y$, 则 O 作为 Y 中(也就是说相对拓扑中)的开集与 O 作为 X 的开集之间有着很大的区别. 例如, 如果 X 是具有寻常拓扑的实直线, $Y=[0, 1]$是闭单位区间, 则集合$(1/2, 1]$是 Y 的一个开子集,因为它是自己每一点的邻域. 但$(1/2, 1]$不是 X 中的开集, 因为它不是点 1 的邻域. 因此, 当我们在文章中谈到空间与子空间的开集时必须谨慎,应当指出一个给定的集合是整个空间 X 的开集或是子空间 Y 的开集. 当然, 对闭集以及其它拓扑特性比如闭包, 极限点等等也应有类似的谨慎.

如果我们有识别子空间开集的某个准则将令人满意. 下面的定理恰好给出这样一个准则。

1.19 定理 设 X 是一个拓扑空间,Y 是 X 的子空间,$O\subseteq Y$, 则 O 是 Y 中的开集当且仅当存在 X 的开集 O',使得 $O=O'\cap Y$.

证明 设 $\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_x\,|\,x\in X\}$ 是 X 的拓扑, 又设

$$\mathscr{T}'=\{\mathscr{V}_x\,|\,x\in Y\}=\{\mathscr{U}_x\cap Y\,|\,x\in Y\}$$

是 Y 的相对拓扑. 若 $O=O'\cap Y$, 这里 O' 是 X 的开集, 取 $x\in O$, 则 $x\in O'$, 由 1.3 有 $O'\in\mathscr{U}_x$. 由此, 有

$$O=O'\cap Y\in\mathscr{U}_x\cap Y,$$

因此 O 在 Y 中是开的.

反之, 假设 O 是 Y 中的开集, 则对每一点 $x\in O$ 都有 $O\in\mathscr{U}_x\cap Y$. 也就是说对每一点 $x\in O$ 都有 $U_x\in\mathscr{U}_x$, 使得 $O=U_x\cap Y$. 又由 1.4, 对每一点 $x\in O$ 以及每一个 U_x, 都存在 X 中的开集 O_x, 使得 $x\in O_x\subseteq U_x$. 定义

$$O'=\bigcup_{x\in O}O_x,$$

根据1.5, O' 是 X 的开集. 我们现在证明 $O=O'\cap Y$. 设 $y\in O\subseteq Y$, 则 $y\in O_y$, 因此 $y\in O'$, 所以 $y\in O'\cap Y$. 另一方面, 设 $y\in O'\cap Y$, 则对某一点 $x\in O$ 有 $y\in O_x$, 由于 $O_x\subseteq U_x$, 所以 $y\in U_x\cap Y=O$, 因此 $y\in O$. 这样就证明了 $O=O'\cap Y$. ∎

练　　习

1.50　证明在1.18中定义的 $\mathscr{V}_y$ 是 $y\in Y$ 的邻域系.

1.51　设 X 是一个拓扑空间, Y 是 X 的开子集又是 X 的子空间. 证明 O 是 Y 中的开集当且仅当 O 是 X 的开集.

1.52　如果 X 是一个拓扑空间, Y 是 X 的子空间而且满足条件: O 是 Y 中的开集当且仅当 O 是 X 中的开集. 证明 Y 是 X 的开子集.

1.53　设 X 是一个拓扑空间, Y 是 X 的子空间, 证明 $C\subseteq Y$ 是 Y 中的闭集当且仅当存在 X 的闭子集 C', 使得 $C=C'\cap Y$.

§7　序列的极限·Hausdorff 空间

1.20 定义　设 X 是一个拓扑空间, $x\in X$, $\{x_n|n=1, 2, \cdots\}$ 是 X 中点的序列. 如果对每一个 $U\in\mathscr{U}_x$ 存在整数 N, 使得当 $n\geq N$ 时有 $x_n\in U$, 则称序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 称 x 是序列 $\{x_n\}$ 的极限.

例子(和练习)

1.54　设 R 是具有寻常拓扑的实直线, $\{x_n\}$ 是 R 中以 x 为极限的序列. 证明在通常分析的意义下有 $\lim x_n=x$, 也就是说对任意 $\varepsilon>0$, 存在整数 N, 当 $n\geq N$ 时有 $|x_n-x|<\varepsilon$.

1.55　设 X 是具有离散拓扑的非空集合, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列, x 是序列 $\{x_n\}$ 的极限, 则存在整数 N, 当 $n\geq N$ 时 $x_n=x$.

1.56　设 E 是实平面, 对 $\varepsilon>0$, 定义

$$S_\varepsilon(x, y)=\{(u, v)\mid(u, v)\in E, |x-u|<\varepsilon\}$$

和 $$\mathscr{U}_{(x,y)}=\{U\mid 对某个\ \varepsilon>0, U\supseteq S_\varepsilon(x, y)\}.$$

证明 $\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_{(x,y)}\mid(x, y)\in E\}$ 是 E 的一个拓扑. 设 $\{(x_n, y_n)\}$ 是以 $\mathscr{T}$ 为拓扑的 E 中的序列, (x_0, y_0) 是序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 的极限, 则对任意一个 z, (x_0, z) 也是序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 的极限. 因此, 序列的极限不必是唯一的.

1.57 序列极限概念的另一个更一般的引入. 设 $\{A_n\mid n=1, 2, \cdots\}$ 是某个拓扑空间 X 中的集合的一个序列. 定义

$$\limsup_n A_n=\{y\mid 对每一个\ U\in\mathscr{U}_y, 对无限多个指标\ n\ 有\ U\cap A_n\neq\phi\},$$

$\limsup_n A_n$ 称为序列 $\{A_n\mid n=1, 2, \cdots\}$ 的**上极限**.

又定义

$$\liminf_n A_n=\{y\mid 对每一个\ U\in\mathscr{U}_y, 除有限个指标\ n\ 外所有\ U\cap A_n\neq\phi\},$$

$\liminf_n A_n$ 称为序列 $\{A_n\mid n=1, 2, \cdots\}$ 的**下极限**.

如果 $\liminf_n A_n=\limsup_n A_n$, 我们定义这个公共集合为 $\lim_n A_n$. 试证明下列各点:

(a) $\liminf_n A_n\subseteq\limsup_n A_n$.

(b) 如果对每一个 n 有 $A_n=\{x_n\}$ 且在上面定义的意义下有 $\lim_n A_n=\{x\}$, 则在定义 1.20 的意义下 $\lim_n x_n=x$.

(c) 设 $A_n=\{(x_n, y_n)\}(n=1, 2, \cdots)$ 是练习 1.56 中的序列, 则在上面定义的意义下 $\lim_n A_n=\{(x_0, z)\mid z\in R\}$.

由于此时可能还不明显的原因, 我们引入一类具有更强结构的新空间. 引入这些空间的动机将在定义和几个例子之后显现出来.

1.21 定义 设$(X, \mathscr{T})$是一个拓扑空间，如对 X 中的任意两点 $x, y, x\neq y$，存在$U\in\mathscr{U}_x$，$V\in\mathscr{U}_y$，使得$U\cap V=\phi$，则称 $\mathscr{T}$ 是 X 的 **Hausdorff**(或 $\mathbf{T}_2$)拓扑，X 称为 **Hausdorff**(或 $\mathbf{T}_2$)空间.

例子(和练习)

1.58 (a) 具有寻常拓扑的实直线是 Hausdorff 空间.

(b) 具有寻常拓扑的实平面是 Hausdorff 空间.

1.59 具有练习 1.56 定义的拓扑的实平面不是 Hausdorff 空间.

1.60 设

$$X=\{f\,|\,f\text{ 是定义在}[0, 1]\text{上的实值有界函数}\},$$

定义

$S_\varepsilon(f)$

$$=\{g\,|\,g\in X,\text{ 对全体 }x\in[0, 1]\text{ 有 }|f(x)-g(x)|<\varepsilon\},$$

又定义

$$\mathscr{U}_f=\{U\,|\,\text{对某个 }\varepsilon>0\text{ 有 }U\supseteq S_\varepsilon(f)\}.$$

则拓扑 $\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_f\,|\,f\in X\}$ 是 X 的 Hausdorff 拓扑. 如果 $\{f_n\}$ 是 X 中(X 具有拓扑 $\mathscr{T}$)收敛于极限 f 的序列，则在 $[0, 1]$上 $f_n(x)$在通常分析的意义下一致收敛于 $f(x)$，也就是说，对任意一个 $\varepsilon>0$，存在整数 N，当 $n\geqq N$ 时

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\quad\text{对所有的 }x\in[0, 1]\text{成立.}$$

我们已经看到，在一个任意的拓扑空间中序列的极限不必是唯一的. 我们是如此习惯于序列有唯一的极限，如果有某种性质能保证这个唯一性，这将是令人愉快的. 这正好是引入 Hausdorff 空间的原因. 正如下一个定理所指出，这样的空间具有序列的极限是唯一的这样一个良好的性质.

1.22 定理 设 X 是 Hausdorff 空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列，x 是序列 $\{x_n\}$ 的一个极限，则 x 是 $\{x_n\}$ 的唯一极限，也就是说如果

序列 $\{x_n\}$ 有极限，则它有唯一的极限.

证明 设 $\{x_n\}$ 收敛于两个极限 x, y, 且 $x\neq y$. 根据 1.21 可设 $U\in\mathscr{U}_x$, $V\in\mathscr{U}_y$ 且 $U\cap V=\phi$. 因为 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 故存在整数 N_1, 使得 $n\geqq N_1$ 时有 $x_n\in U$. 又因为 $\{x_n\}$ 收敛于 y, 故存在整数 N_2, 使得 $n\geqq N_2$ 时有 $x_n\in V$. 选取 n 充分地大使得 $n\geqq N_1$, $n\geqq N_2$, 则同时有 $x_n\in U$ 与 $x_n\in V$, 因此 $x_n\in U\cap V=\phi$. 这是一个明显的矛盾. 因此 $x=y$. ▌

这样的情况完全有可能产生：序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x, 而 x 不是集合 $\{x_n|n=1, 2, \cdots\}$ 的极限点. 例如在实直线上，如果对全体 n 都有 $x_n=1$, 则显然 $\{x_n\}$ 收敛于 1, 但 1 不是集合 $\{x_n|n=1, 2, \cdots\}$ 的极限点. 也可能序列 $\{x_n\}$ 有极限点，但 $\{x_n\}$ 不收敛于这个极限点，或根本不收敛于任何点. 例如在实直线上，如果 $x_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$, 则 1 是 $\{x_n\}$ 的极限点，但 $\{x_n\}$ 不收敛于任何点. 这两个例子使事情看来有些难办，但下一个定理解决了这一问题.

1.23 定理 如果 X 是 Hausdorff 空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列且收敛于某个点 $x\in X$, y 是集合 $\{x_n|n=1, 2, \cdots\}$ 的极限点，则 $x=y$.

证明 假若 $x\neq y$, 则存在 $U\in\mathscr{U}_x$, $V\in\mathscr{U}_y$ 使得 $U\cap V=\phi$. 因为 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 因而存在整数 N, 当 $n\geqq N$ 时有 $x_n\in U$. 根据 1.21, 对每一个 $i(1\leqq i\leqq N)$, 只要 $y\neq x_i$ 就存在 $W_i\in\mathscr{U}_{x_i}$, $V_i\in\mathscr{U}_y$ 使得 $W_i\cap V_i=\phi$. 现在当 $x_i\neq y$ 时定义 $V_i'=V_i$, 当 $x_i=y$ 时定义 $V_i'=V$. 又定义

$$V'=V\cap\left(\bigcap_{i=1}^{N}V_i'\right),$$

则由 1.1(3) 有 $y\in V'\in\mathscr{U}_y$. 现在我们指出，如果 $z\in V'$ 且 $z\neq y$, 则对任何 i 都有 $z\neq x_i$. 因为，如果 $i\geqq N$, 则 $x_i\in U$, 而 $U\cap V'\subseteq U\cap V=\phi$; 如果 $i\leqq N$, 则或者 $x_i=y\neq z$ 或者 $x_i\in W_i$, 而 $W_i\cap V'\subseteq$

$W_i \cap V_i = \phi$. 这样一来我们构造出 y 的邻域 V'，使得集合 $\{x_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 中不等于 y 的点都不在 V' 中. 这显然与 y 是集合 $\{x_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 的极限点矛盾，所以 $x = y$. ▌

§8 拓扑的比较

1.24 定义 设 X 是一个集合，$\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑. 又设 $\mathscr{U}_{i,x}$ 是点 x 在拓扑 $\mathscr{T}_i$ 中的邻域系，这里 $i = 1, 2$. 如果对每一个点 $x \in X$ 都有 $\mathscr{U}_{2,x} \subseteq \mathscr{U}_{1,x}$，则称 $\mathscr{T}_1$ 比 $\mathscr{T}_2$ 细，记为 $\mathscr{T}_2 \leqq \mathscr{T}_1$.

这个定义的实质是，一个拓扑比另一个细，则比较细的拓扑的每一个点的邻域至少与另一个拓扑相应点的邻域一样多. 一个空间所有拓扑中最细的拓扑显然是离散拓扑；反之，一个空间所有拓扑中最粗的(也就是最不细)的拓扑是平庸拓扑. 空间的拓扑越细，空间的邻域就越多，因此人们可以希望其它的结构特性也更丰富. 事实上，这个情况能由如下定理给出.

1.25 定理 设 X 是一个集合，$\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 是 X 的两个拓扑. 又设 $\mathscr{O}_1$ 与 $\mathscr{O}_2$ 分别是由 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 产生的开集族，则 $\mathscr{T}_2 \leqq \mathscr{T}_1$ 当且仅当 $\mathscr{O}_2 \subseteq \mathscr{O}_1$.

证明 设 $O \in \mathscr{O}_2$. 如果 $O = \phi$，由 1.5 可得 $O \in \mathscr{O}_1$. 如果 $O \neq \phi$，设 $x \in O$，则根据 1.3 可以得出 $O \in \mathscr{U}_{2,x}$，此处 $\mathscr{U}_{i,x} (i = 1, 2)$ 与 1.24 中的含意相同. 由于 $\mathscr{T}_2 \leqq \mathscr{T}_1$，根据 1.24 我们有 $\mathscr{U}_{2,x} \subseteq \mathscr{U}_{1,x}$，因此 $O \in \mathscr{U}_{1,x}$. 由于 x 是 O 的任意点，根据 1.3 有 $O \in \mathscr{O}_1$，因此 $\mathscr{O}_2 \subseteq \mathscr{O}_1$. 反过来的证明留作练习. ▌

1.26 推论 设 X 是一个集合，$\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑，且 $\mathscr{T}_2 \leqq \mathscr{T}_1$. 又设 $\mathscr{C}_1$ 与 $\mathscr{C}_2$ 分别是由 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 产生的闭集族，则 $\mathscr{C}_2 \subseteq \mathscr{C}_1$.

证明 设 $C \in \mathscr{C}_2$，根据 1.14 有 $X - C \in \mathscr{O}_2$. 于是根据 1.25

有 $X-C\in\mathscr{O}_1$, 再由 1.14 知 $C=X-(X-C)\in\mathscr{C}_1$, 因此 $\mathscr{C}_2\subseteq\mathscr{C}_1$. ∎

练　　习

1.61　设 X 是一个集合, $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑, 则 $\mathscr{T}_1\leq\mathscr{T}_2$ 当且仅当对每一点 $x\in X$ 与每一个 $U\in\mathscr{U}_{1,x}\in\mathscr{T}_1$, 存在 $U'\in\mathscr{U}_{2,x}\in\mathscr{T}_2$, 使得 $U'\subseteq U$.

1.62　设 X 是一个集合, $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑, 则 $\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$ 当且仅当 $\mathscr{T}_1\leq\mathscr{T}_2$ 与 $\mathscr{T}_2\leq\mathscr{T}_1$ 同时成立.

1.63　证明 1.25 中未证明的部分.

§9　基·可数性公理·可分性

我们已经看到至少有两种方式定义一个集合 X 上的拓扑. 能够对每一个点定义一个邻域系, 然后将全部邻域系所成的集族作为拓扑. 也能够先定义一个开集族, 然后以如下方式定义点的邻域: 如果一个集合包含某个开集, 而这个点也属于此开集, 则这个集合是该点的一个邻域. 还有另外的方式也能给出拓扑的定义, 这就是用基定义拓扑.

1.27 定义　空间 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 的**基** $\mathscr{B}$ 是满足以下条件的 X 的开集族: 对每一点 $x\in X$ 以及每一个 $U\in\mathscr{U}_x$, 存在 $V\in\mathscr{B}$, 使得 $x\in V\subseteq U$. $\mathscr{B}$ 的元素称为基元.

注意, 如果 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, $Y\subseteq X$, 则

$$\mathscr{B}\cap Y=\{B'\mid B'=B\cap Y,\ B\in\mathscr{B}\}$$

是 Y 上相对拓扑的基. $\mathscr{B}\cap Y$ 称为由 X 的基 $\mathscr{B}$ 诱导的 Y 的基. [参看练习 1.64(b)与练习 1.72]

例子(和练习)

1.64 (a) 设 R 是实直线, $\mathscr{B}=\{(a,b)\mid a<b,\ a,\ b\in R\}$, 也就是

说 $\mathscr{B}$ 是所有开区间所成的集族，则 $\mathscr{B}$ 是 R 上的寻常拓扑的基.

(b) 上面(a)中的基诱导的[0, 1]上相对拓扑的基是什么?

1.65 设 E 是实平面，$S_\varepsilon(x, y)$是关于点$(x, y)\in E$ 的开 ε-球. 设
$$\mathscr{B}=\{S_\varepsilon(x, y)\mid \varepsilon>0,\ (x, y)\in E\},$$
则 $\mathscr{B}$ 是 E 上寻常拓扑的基.

1.66 设 X 是在"$\leqq$"下的偏序集，又设
$$S_r(x)=\{y\mid y\geqq x\},$$
再设 $\mathscr{B}=\{S_r(x)\mid x\in X\}$，则 $\mathscr{B}$ 是 X 的右序拓扑的基.

1.67 设 X 是[0, 1]上的所有实值可积函数所成的集合，且设
$$S_\varepsilon(f)=\left\{g\mid g\in X,\ \int_0^1|f-g|dx<\varepsilon\right\},$$
又设 $\mathscr{B}=\{S_\varepsilon(f)\mid f\in X,\ \varepsilon>0\}$，则 $\mathscr{B}$ 是练习 1.4 中描述的 X 的拓扑的基.

1.68 设 X 是一个非空集，$\mathscr{B}=\{\{x\}\mid x\in X\}$，则 $\mathscr{B}$ 是 X 的离散拓扑的基.

1.69 设 X 是一个非空集，$\mathscr{B}=\{X\}$，则 $\mathscr{B}$ 是 X 的平庸拓扑的基.

学生应当证明前面例子中叙述的集族 $\mathscr{B}$ 的确是所描述拓扑的基.

1.28 定理 设 X 是一个集合，$\mathscr{T}$ 是 X 的拓扑，则 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的基当且仅当
$$\mathscr{A}=\{\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha\mid A\text{ 是任意指标集，对每个 }\alpha\text{ 有 }B_\alpha\in\mathscr{B}\}$$
是 X 上由 $\mathscr{T}$ 产生的开集族 $\mathscr{O}$.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的基. 因为每一个 B_α 都是开的，由 1.5(1)显然 $\mathscr{A}$ 的每一个元素是开的，所以 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{O}$. 另一方面，设 $O\in\mathscr{O}$，$x\in O$，则由 1.8 知 $O\in\mathscr{U}_x$，根据 1.27 存在 $B_x\in\mathscr{B}$，使得

$x\in B_x\subseteq O$. 显然

$$O=\bigcup_{x\in O} B_x,$$

所以 $O\in\mathscr{A}$. 因此 $\mathscr{O}\subseteq\mathscr{A}$, 从而 $\mathscr{O}=\mathscr{A}$.

反之,设 $\mathscr{B}$ 具有所要求的性质. 对 $x\in X$, $U\in\mathscr{U}_x$, 由 1.4 知存在 $O\in\mathscr{O}$, 使得 $x\in O\subseteq U$. 现在

$$O=\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha,$$

这里 $B_\alpha\in\mathscr{B}$. 因为 $x\in O$, 所以对某个 α 有 $x\in B_\alpha$, 因此 $x\in B_\alpha\subseteq O\subseteq U$, 根据 1.27 $\mathscr{B}$ 是一个基. ▮

练　习

1.70　设 $X=\{0, 1, 2\}$, $A=\{0, 1\}$, $B=\{1, 2\}$, 又设 $\mathscr{A}=\{X, A, B, \phi\}$, 则 $\mathscr{A}$ 不是 X 上任何拓扑的基. [提示: 注意到 $\mathscr{A}$ 中任意个集合的并也在 $\mathscr{A}$ 中, 因此如果 $\mathscr{A}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的基, 则 $\mathscr{A}=\mathscr{O}$, 此处 $\mathscr{O}$ 是由 $\mathscr{T}$ 产生的 X 的开集所成的集族. 证明 $\mathscr{A}$ 不能是这样的开集族.]

1.27中定义的观点是这样的, 给出了一个拓扑, 就得到一个开集族 $\mathscr{O}$, 这个开集族的某些子集是基. 现在我们可以反过来考虑, 给出了集合 X 的某个子集族, 试问这个子集族能作为某个拓扑的基吗? 前面的练习告诉我们显然不是给定集合的任一个子集族都能作拓扑的基. 我们自然要问,"有没有把基和给定集合的其余子集族区别开来的性质". 如果有这样的性质, 这当然是很好的, 因为它将使我们能把基与其余的子集族区别开. 事实上, 这样的性质可由下面的定理给出.

1.29 定理　集合 X 的一个子集族 $\mathscr{B}$ 是某个拓扑 $\mathscr{T}$ 之基当且仅当下面两点成立

(1) $X=\bigcup_{B_\alpha\in\mathscr{B}} B_\alpha$.

(2) 对每一点 $x\in X$ 与 $U, V\in\mathscr{B}$(这里 $x\in U$, $x\in V$), 存在 $W\in\mathscr{B}$, 使得 $x\in W\subseteq U\cap V$.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 X 上某拓扑 $\mathscr{T}$ 之基. 对 $x\in X$, 存在 $U\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$, 使得 $x\in U$, 由 1.27 存在 $B_x\in\mathscr{B}$, 使得 $x\in B_x\subseteq U$. 显然

$$X\subseteq\bigcup_{x\in X} B_x\subseteq\bigcup_{B_\alpha\in\mathscr{B}} B_\alpha\subseteq X,$$

因此 $X=\bigcup_{B_\alpha\in\mathscr{B}} B_\alpha$, 条件(1)成立.

设 $U, V\in\mathscr{B}$, $x\in U$, $x\in V$, 定义 $U'=U\cap V$, 则由 1.27, 因为 U 与 V 都是开的, 所以 U' 也是开的, 故 $U'\in\mathscr{U}_x$. 根据 1.27, 存在 $W\in\mathscr{B}$, 使得 $x\in W\subseteq U'=U\cap V$. 条件(2)成立.

反之,设 $\mathscr{B}$ 满足条件(1)和(2). 定义

$$\mathscr{O}=\{\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha \mid A \text{ 是任意指标集, } B_\alpha\in\mathscr{B}\}.$$

现在我们希望用 1.6 去证明 $\mathscr{O}$ 产生了一个拓扑 $\mathscr{T}$, 因此我们只需证明 $\mathscr{O}$ 满足 1.6 的假定. 因为 $\mathscr{O}$ 的元素之并仍然是 $\mathscr{B}$ 中集合的并, 因此仍然是 $\mathscr{O}$ 的元素, 由此 1.6 的假定(1)满足. 条件(1)保证了 $X\in\mathscr{O}$, 因此 1.6 的假定(3)满足. 设指标集 $A=\phi$, 则 $\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha=\phi$, 因此 $\phi\in\mathscr{O}$, 由此 1.6 的假定(4)满足. 最后, 设 U, $V\in\mathscr{O}$, 如果 $U\cap V=\phi$, 则因 $\phi\in\mathscr{O}$, 故 $U\cap V\in\mathscr{O}$. 如果 $U\cap V\neq\phi$, 对每一点 $x\in U\cap V$, 取 $B_x\in\mathscr{B}$, $B'_x\in\mathscr{B}$, 使得

$$x\in B_x\subseteq U, \quad x\in B'_x\subseteq V.$$

根据条件(2), 存在 $W_x\in\mathscr{B}$, 使得

$$x\in W_x\subseteq B_x\cap B'_x\subseteq U\cap V.$$

最后设 $W=\bigcup_{x\in U\cap V} W_x$, 则显然 $W=U\cap V$, 又由于每一个 $W_x\in\mathscr{B}$, 所以 $W\in\mathscr{O}$, 由此 1.6 的假定(2)满足. 故 $\mathscr{O}$ 的确诱导出 X 上的一个拓扑. ▮

一类重要的空间是以可数个元素为基的空间. 如下作出

1.30 定义 如果空间 X 有这样的基 $\mathscr{B}$: $\mathscr{B}$ 是可数族, 也就是说 $\mathscr{B}=\{B_i \mid i=1, 2, \cdots\}$, 则称这样的空间满足**第二可数性公理**或简称为具有**可数基**.

我们有时也将具有可数基, 也就是说满足第二可数性公理的空间称为第二可数空间.

例子(和练习)

1.71 (a) 设 R 是具有寻常拓扑的实直线, 又设

$$\mathscr{B}=\{(a, b) \mid a, b \text{ 是有理数}, a<b\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是 R 的可数基.

(b) 设 E 是具有寻常拓扑的实平面, 又设

$$\mathscr{B}=\{S_s(x, y) \mid x, y, s \text{ 都是有理数}, s>0\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是 E 的可数基.

1.72 证明具有可数基的空间的任意子空间也有可数基. [提示: 如果 $Y\subseteq X$, $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 首先证明 $\mathscr{B}\cap Y=\{B\cap Y \mid B\in\mathscr{B}\}$ 是 Y 的基.]

如下定义的可分空间与第二可数空间有密切关系.

1.31 定义 如空间 X 具有可数稠密子集(参看 1.17), 也就是说, 如存在 $A\subseteq X$, A 是可数的且 $\overline{A}=X$, 则称 X 是**可分的**.

第二可数空间与可分空间的关系由下面定理给出.

1.32 定理 设 X 是具有可数基的拓扑空间, 则 X 是可分的.

证明 设 $\mathscr{B}=\{B_i \mid i=1, 2, \cdots\}$ 是 X 的可数基, 定义 $A=\{x_i \mid x_i\in B_i, i=1, 2, \cdots\}$, 也就是说 $A\cap B_i=\{x_i\}$. 我们现在证明 $\overline{A}=X$. 设 $x\in X$, 如果对某个 i, $x=x_i$, 则 $x\in A\subseteq\overline{A}$, 因此我们

假设对每一个 i, $x\neq x_i$. 设 $U\in\mathscr{U}_x$, 则存在 $B_i\in\mathscr{B}$, 使得 $x\in B_i\subseteq U$. 由于 $x_i\in B_i\subseteq U$ 且 $x_i\neq x$, 故 x 的每一个邻域 U 都包含有 A 中异于 x 的点, 因此 $x\in\overline{A}$, 由此 $X\subseteq\overline{A}$. 又因为 $A\subseteq X$, $\overline{A}\subseteq\overline{X}=X$, 我们有 $\overline{A}=X$, 所以 A 即是所需的可数稠密子集. ▌

由下面例子可以看出这个定理的逆命题不成立。

例子(和练习)

1.73 设 R 是实数集(或者任意的不可数集), 用以下方式定义开集族 $\mathscr{O}$

$$\mathscr{O}=\{O\,|\,O=\phi \text{ 或 } O=R-F, \text{ 此处 } F \text{ 是有限集}\}.$$

则由 1.6, $\mathscr{O}$ 产生 R 上的一个拓扑. 设 S 是 R 上任意一个无限集, 则 $\bar{S}=R$. 特别地, 如果 S 是一个可数集, 我们看到 R 具有这个拓扑时是可分的.

设 R 有可数基 $\mathscr{B}$, $x\in R$, 由 $\mathscr{O}$ 的定义, 集合 $R-\{x\}$ 是开的. 定义

$$\mathscr{B}_x=\{B\,|\,B\in\mathscr{B},\ x\in B\} \quad \text{以及} \quad \mathscr{O}_x=\{O\,|\,O\in\mathscr{O},\ x\in O\}.$$

容易证明

$$\{x\}\subseteq\bigcap_{B\in\mathscr{B}_x}B\subseteq\bigcap_{O\in\mathscr{O}_x}O=\{x\},$$

因此 $\{x\}=\bigcap_{B\in\mathscr{B}_x}B$. 因为每一个 $B\in\mathscr{B}_x$ 是开的, 故 $B^c=F$ 是有限集, 这样

$$R-\{x\}=R-\bigcap_{B\in\mathscr{B}_x}B=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_x}B^c,$$

后面这个集合是可数个有限集的并(因为 $\mathscr{B}$ 的子族 $\mathscr{B}_x$ 是可数的), 因此 $R-\{x\}$ 是可数的. 这个明显的矛盾说明 R 在由 $\mathscr{O}$ 定义的拓扑中不是第二可数的.

1.74 设 J 是平面上的单位正方形, 也就是说

$$J=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}.$$

设 $\mathscr{T}$ 由如下定义: 如果

$$(x,\ y)\in\mathring{J}=\{(x,\ y)\,|\,0<x<1,\ 0<y<1\}$$

定义

$$\mathscr{U}_{(x,y)}=\{U\mid 对某个\ \varepsilon>0,\ U\supseteq S_\varepsilon(x,y)\cap J,\ 这里\ S_\varepsilon(x,y)\ 是\ (x,y)\ 的开\ \varepsilon\text{-}球\},$$

如果

$$(x,y)\in \mathrm{Fr}(J)=\{(x,y)\mid x=0\quad 或\quad x=1\quad 或\quad y=0\quad 或\quad y=1\}$$

定义

$$\mathscr{U}_{(x,y)}=\{U\mid 对某个\ \varepsilon>0,\ U\supseteq(S_\varepsilon(x,y)\cap \mathring{J})\cup\{(x,y)\}\}.$$

则$(J,\mathscr{T})$是可分的，但是没有可数基.

学生可能会感到奇怪为什么有第二可数性公理而没有第一可数性公理. 事实上，第一可数性公理是存在的. 即是说，一个空间 X 满足**第一可数性公理**或者称它是**第一可数的**，或者称它在**每一点有可数基**，如果对每一点 $x\in X$ 存在可数族 $\mathscr{B}_x\subseteq\mathscr{O}$，使得对每一个 $U\in\mathscr{U}_x$ 存在 $B\in\mathscr{B}_x$，满足 $x\in B\subseteq U$. 第一可数性在空间结构上与第二可数性相比较弱，因为任何第二可数空间显然都是第一可数空间，然而下面的例子告诉我们反之不真.

例子(和练习)

1.75 X 是具有离散拓扑的不可数集，对 $x\in X$，设 $\mathscr{B}_x=\{B\mid B=\{x\}\}$. 则 X 是第一可数空间但显然不是第二可数空间.

1.76 第一可数性与可分性之间有什么关系，也就是说由它们中的任何一个性质可以得出另一个性质呢，还是存在可分而不是第一可数的空间，或是存在第一可数而非可分的空间?

§10 次基·积空间

我们已经看到我们能够从邻域系开始(1.2)，或者从开集族开始(1.6)，或者从基元所成的集族开始(1.29)构造空间的拓扑. 这

些构造拓扑的每一种方式都以邻域系这个原始概念为出发点依次地推进一步．我们能够没有危险地再进一步而仍能对一个集合构造拓扑．这最后的谨慎的一步如下：

1.33 定义 设 X 是一个空间，如果集族

$$\left\{B \,\middle|\, B=\bigcap_{i=1}^{k} S_i,\ S_i\in\mathscr{S},\ k=1,\ 2,\ \cdots\right\}$$

是拓扑 $\mathscr{T}$ 的基，则称集族 $\mathscr{S}$ 为 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 的次基．这就是说，$\mathscr{S}$ 中有限个元素之交所构成的集族是 $\mathscr{T}$ 的基．

如 1.6，1.29 和下一个定理的假设中所示，随着每一步中集族 $\mathscr{O}$(1.6)，$\mathscr{B}$(1.29) 和 $\mathscr{S}$(1.33) 的引进，我们选择的自由也就更大．

1.34 定理 设 X 是一个集合，又设 $\mathscr{S}$ 是 X 的一个子集族，使得

(1) $\mathscr{S}\neq\phi$，

(2) $X=\bigcup_{S\in\mathscr{S}} S$，

则 $\mathscr{S}$ 是 X 上某拓扑的次基．

证明 设

$$\mathscr{B}=\left\{B \,\middle|\, B=\bigcap_{i=1}^{k} S_i,\ S_i\in\mathscr{S},\ k=1,\ 2,\ \cdots\right\}.$$

则显然 $\mathscr{B}\supseteq\mathscr{S}$，因此

$$X\supseteq\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B\supseteq\bigcup_{S\in\mathscr{S}} S=X,$$

从而 $X=\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$．现在设 $x\in X$，U，$V\in\mathscr{B}$ 且 $x\in U$，$x\in V$．因为 U 与 V 是 $\mathscr{S}$ 中有限个元素的交，因此它们的交 $W=U\cap V$ 也是 $\mathscr{S}$ 中有限个元素的交，因此 $W\in\mathscr{B}$．又显然

$$x\in W\subseteq U\cap V.$$

由此，1.29 的条件满足，因此 $\mathscr{S}$ 产生 $\mathscr{B}$，而 $\mathscr{B}$ 又产生 X 的某拓

扑 $\mathscr{T}$. ▌

根据方才的定理和定义，由次基可以生成一个拓扑，而次基还刻划了由它唯一生成的拓扑. 关于这点请见下例.

例子(和练习)

1.77 设 $\mathscr{S}$ 是集合 X 的子集族，且 $\mathscr{S}\neq\phi$, $\bigcup_{S\in\mathscr{S}} S=X$. 根据 1.34，设 $\mathscr{T}$ 是由 $\mathscr{S}$ 产生的拓扑. 又设 $\mathscr{O}$ 是具有拓扑 $\mathscr{T}$ 的 X 的开集族. 则 $\mathscr{T}$ 是在条件 $\mathscr{S}\sqsubseteq\mathscr{O}$ 下最粗的拓扑. 也就是说如果 $\mathscr{T}'$ 是任意另一个开集族 $\mathscr{O}'$ 的拓扑，且 $\mathscr{S}\sqsubseteq\mathscr{O}'$，则 $\mathscr{T}\leqq\mathscr{T}'$.

当谈到空间的某个开集时，每次都必须写作"$O\in\mathscr{O}$, $\mathscr{O}$ 是空间 X 的开集族"是一件麻烦事. 如果约定 $\mathscr{O}$ 总是表示空间的开集族则可免去这个麻烦. 当然，类似的作法也可以应用到所讨论空间的其它子集族. 让我们如下约定：

$\mathscr{U}_x$ 总是表示 $x\in X$ 的邻域系，

$\mathscr{T}$ 总是表示 X 的拓扑，

$\mathscr{O}$ 总是表示 X 的开集族，

$\mathscr{C}$ 总是表示 X 的闭集族，

$\mathscr{B}$ 总是表示 X 的拓扑的某个基，

$\mathscr{S}$ 总是表示 X 的拓扑的某个次基.

为了避免混乱，我们将注意不用这些符号去表示与这里的含意不相同的任何其它事物.

次基的主要用处之一是向空间的笛卡儿积引入拓扑. 但是用这个对我们现在有用的工具去描述无限多个拓扑空间的笛卡儿积的寻常拓扑却有困难. 事实上，在我们有函数概念之前，正是这个笛卡儿积定义起来很麻烦. 这样，我们暂时将笛卡儿积限制在只有有限个因子. 在有机会研究函数与连续函数之前，我们不叙述向

无限多个拓扑空间的笛卡儿积定义和导入拓扑的标准方法.

1.35 定义 设 $X_i(i=1, 2, \cdots, n)$是拓扑空间，对每一个 i, $\mathscr{O}_i$ 是相应的开集族, 设

$$X=\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i$$

是它们的笛卡儿积, 又设

$$\mathscr{S}=\left\{S \mid S=\mathop{\times}_{i=1}^{n} Y_i,\ i\neq j \text{ 时所有 } Y_i=X_i,\ Y_j=U_j\in\mathscr{O}_j,\ j=1, 2, \cdots, n\right\},$$

则 $\mathscr{S}$ 是 X 的一个拓扑的次基. 这样定义的拓扑称为**积拓扑**.

学生应当(用 1.34)自己验证 1.35 中的集族 $\mathscr{S}$ 的确是某个拓扑的次基. $X=\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i$ 的点形如 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 这里 $x_i\in X_i$, x_i 称为 x 的坐标. 我们可以简单地认为 1.35 中的次基 $\mathscr{S}$ 的元素是由 X 的某些点构成, 而这些点有如下特征: 除去一个坐标之外所有的坐标都能任意选取(也就是说可以是相应空间 X_i 中的任意点), 而那一个坐标局限在 X_j 的某个开集中.

例子(和练习)

1.78 设 $E=R\times R$, R 是实直线, 因而 E 是实平面. 设 $O\subseteq R$ 是具有寻常拓扑的实直线上的开集, 则 $O=\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$(请证明), 这里 I_α 是某个开区间且我们可以假设 I_α 是不相交的. 积拓扑中 E 的次基是形如 $R\times O$(或 $O\times R$)的元素所成的集合, 这些元素是区间 O 上无限长的"矩形". E 的积拓扑的基元是 E 中某些矩形所成的集族, 而 E 的开集是基中任意个矩形的并. 这里所说的矩形是形如下面的集合:

$$\{(x, y) \mid a_1<x<b_1,\ a_2<y<b_2,\ a_1, b_1, a_2, b_2\in R \text{ 或等于 } \pm\infty\}.$$

对学生说来，证明 E 的积拓扑与它的寻常拓扑相同这一点是重要的. 基本的一点是必须证明对每一点 $(x, y)\in E$ 及每个 $\varepsilon>0$，存在矩形 $R\subseteq E$，使得 $(x, y)\in R\subseteq S_\varepsilon(x, y)$ 以及对每一个矩形 $R\subseteq E$，$(x, y)\in R$，存在 $\delta>0$，使得 $S_\delta(x, y)\subseteq R$(参看练习 1.7).

1.79 设 X_1, X_2 是拓扑空间，$\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ 分别是它们的拓扑，$\mathscr{O}_1$, $\mathscr{O}_2$ 是相应的开集族. 设 $\mathscr{B}$ 是根据 1.35 由次基 $\mathscr{S}$ 产生的积拓扑的基.

(a) 证明 $\mathscr{B}=\{U_1\times U_2 | U_1\in\mathscr{O}_1, U_2\in\mathscr{O}_2\}$.

(b) 证明如果 X_1 与 X_2 是 Hausdorff 空间，则 $X_1\times X_2$ 也是 Hausdorff 空间.

1.80 设 X 是拓扑空间，$Y\subseteq X$ 是一个子空间.

(a) 证明如果 X 是第二可数空间，则 Y 也是第二可数空间.

(b) 用反例说明 X 是可分空间但 Y 不必是可分的.

第一章的附加练习

1.81 设 $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ 是 X 的两个拓扑，$\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ 分别是 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 的基. 则 $\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$ 当且仅当对每一个 $B_1\in\mathscr{B}_1$ 及每一个 $x\in B_1$ 存在 $B_2\in\mathscr{B}_2$，使得 $x\in B_2\subseteq B_1$，以及对每一个 $B_2'\in\mathscr{B}_2$ 及每一个 $x\in B_2'$ 存在 $B_1'\in\mathscr{B}_1$，使得 $x\in B_1'\subseteq B_2'$.

1.82 设 X 是任意的无限集，如果我们认为 X 的每一个无限子集是开的，证明 X 必定具有离散拓扑.

1.83 证明集合

$$\mathscr{S}=\{(a, b) | a=-\infty, b \text{ 是有限实数;}$$
$$\text{或 } a \text{ 是有限实数}, b=\infty\}$$

是实直线寻常拓扑的次基.

1.84 在 Hausdorff 空间中，单点集 $\{x\}$ 是闭集.

1.85 格是每一对元素都有最小上界及最大下界的偏序集. 更明

确地说，如果 S 是一个集合，"$\leq$"是 S 上的一个关系，使得

(a) 对全体 $x\in S$ 有 $x\leq x$,

(b) 对所有 $x, y\in S$, 由 $x\leq y$ 与 $y\leq x$ 可得出 $x=y$,

(c) 对所有 $x, y, z\in S$, 由 $x\leq y$ 与 $y\leq z$ 可得出 $x\leq z$,

则 S 称为在"$\leq$"下的偏序集. S 中的一对元素 x, y 称为在 S 中有最小上界，如果存在 $z\in S$ 使得 $x\leq z$ 与 $y\leq z$ 且对任意的 u, 如果 $x\leq u$ 与 $y\leq u$, 则有 $z\leq u$. 将上面的不等式反向可类似地得出最大下界的定义.

现在设 $\mathscr{F}$ 是某个集合 X 上的所有拓扑所成的集族. 对 $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2\in\mathscr{F}$, 设 $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$ 分别是由 $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ 产生的开集族. 在集合 $\mathscr{F}$ 中，"$\mathscr{T}_2\leq\mathscr{T}_1$"表示拓扑 $\mathscr{T}_1$ 比拓扑 $\mathscr{T}_2$ 细. 又定义

$$\mathscr{O}_*=\{O\mid O\in\mathscr{O}_1 \quad 与 \quad O\in\mathscr{O}_2\}=\mathscr{O}_1\cap\mathscr{O}_2,$$

再定义 $\mathscr{S}=\mathscr{O}_1\cup\mathscr{O}_2$. 回答下列问题，并在适当的地方给出证明:

(i) $\mathscr{O}_*$ 满足 1.6 的条件因而产生一个拓扑 $\mathscr{T}_*$ 吗?

(ii) "$\leq$"是否是 $\mathscr{F}$ 上的偏序?

(iii) $\mathscr{T}_*$ 是不是 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 的最大下界?

(iv) $\mathscr{S}$ 是否满足 1.34 的条件从而它是某个拓扑 $\mathscr{T}^*$ 的次基?

(v) 是否有 $\mathscr{T}_1\leq\mathscr{T}^*$ 与 $\mathscr{T}_2\leq\mathscr{T}^*$?

(vi) $\mathscr{T}^*$ 是不是 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 的最小上界?

(vii) $\mathscr{F}$ 是在"$\leq$"下的格吗?

第二章　连续函数(映射)与同胚

§1　函　　数

当我们对空间拓扑的一般概念有相当掌握之后，根据可设想到的几种性质设法将拓扑空间分类似乎就是很自然的了．我们已经看到了一个这样的性质，那就是成为 Hausdorff 空间的性质．尽管这个想法似乎自然，但在掌握一些进一步的工具之前这样作却有些困难．现在我们尤其需要由一个拓扑空间到另一个拓扑空间的连续函数(或映射)的概念．

我们认为学生已经熟悉函数概念，在这里只是简单地例举了函数的某些有用的性质．如果读者自己没有证明过这些性质(这些性质在读者学习过程中应当证明过)，这又是一次验证它们的好机会．

设 f 是由 X 到 Y 的函数．我们简单地记为 $f:X\to Y$．对于 $x\in X$，用 $f(x)$ 表示 f 在点 x 的值，也称 $f(x)$ 为 x 在 f 下的象．我们说两个函数 $f_1:X\to Y$ 与 $f_2:X\to Y$ 是相同的，如果对全体 $x\in X$ 有 $f_1(x)=f_2(x)$，并记为 $f_1=f_2$．**常值函数** $f:X\to Y$ 是这样的函数，有某个固定的 $y\in Y$，对所有 $x\in X$，都有 $f(x)=y$．如果对所有 $x\in X$ 都有 $i(x)=x$，则称 $i:X\to X$ 为 **X 上的恒等函数**．若 $A\subseteq X$，则称集合

$$f(A)=\{y\,|\,y\in Y,\ 对某个\ x\in A\ 有\ y=f(x)\}$$

是 A 在 f 下的象．$f:X\to Y$ 在 $A\subseteq X$ 上的**限制** $f|A$(或 f_A)是函数 $f|A:A\to Y$，它使得对每一个 $x\in A$ 都有 $(f|A)(x)=f(x)$．在这些条件下 f 称为 $f|A$ 在 X 上的**扩张**．

对 $f:X\to Y$，下列性质成立，其中 $A\subseteq X$，$B\subseteq X$，G 是指标集而且对每一个 $\gamma\in G$ 有 $A_\gamma\subseteq X$。

1. $f(\phi)=\phi$.
2. $f(\{x\})=\{f(x)\}$.
3. 由 $A\subseteq B$ 有 $f(A)\subseteq f(B)$。
4. $A\neq\phi$ 则 $f(A)\neq\phi$.
5. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$，更一般地，有
$$f(\bigcup_{\gamma\in G}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in G}f(A_\gamma).$$
6. $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$，更一般地，有
$$f(\bigcap_{\gamma\in G}A_\gamma)\subseteq\bigcap_{\gamma\in G}f(A_\gamma).$$

集合 $C\subseteq Y$ 在 f 下的逆象 $f^{-1}(C)$ 是集合 $\{x|x\in X,\ f(x)\in C\}$。如果 $f:X\to Y$，$C\subseteq Y$，$D\subseteq Y$，$A\subseteq X$，G 是指标集而且对每一个 $\gamma\in G$ 有 $C_\gamma\subseteq Y$，则下列性质成立：

1. $f(x)=y$ 与 $x\in f^{-1}(y)$ 等价．[注意，我们总是用 $f^{-1}(y)$ 代替 $f^{-1}(\{y\})$.]
2. $f^{-1}(\phi)=\phi$.
3. 由 $C\subseteq D$ 有 $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$.
4. $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$，更一般地，有
$$f^{-1}(\bigcup_{\gamma\in G}C_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in G}f^{-1}(C_\gamma).$$
5. $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$，更一般地，有
$$f^{-1}(\bigcap_{\gamma\in G}C_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in G}f^{-1}(C_\gamma).$$
6. $f^{-1}(C^c)=[f^{-1}(C)]^c$，这里的上标 c 表示关于 X 或 Y 的余。
7. $A\subseteq f^{-1}[f(A)]$。
8. $f[f^{-1}(C)]\subseteq C$。

如果 $f(X)=Y$，则称函数 $f:X\to Y$ 是满的．如果由 $x_1\neq x_2$ 能得出 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称函数 $f:X\to Y$ 是一一的(或者简记为 1-1)．如果 $A\subseteq X$，$B\subseteq X$，$C\subseteq Y$，则下列性质成立：

1．f 是 1-1 的当且仅当对所有 A 与 B，$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$．
2．f 是满的当且仅当对所有 $C\neq\phi$ 有 $f^{-1}(C)\neq\phi$．
3．如果 f 是 1-1 和满的，则 f^{-1} 是由 Y 到 X 的函数．
4．如果 f 是 1-1 和满的，则 $f(A^c)=[f(A)]^c$．
5．f 是满的当且仅当对所有 C 有 $f[f^{-1}(C)]=C$．
6．f 是 1-1 的当且仅当对所有 A 有 $f^{-1}[f(A)]=A$．
7．f 是 1-1 和满的当且仅当对每一个 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的单点子集．

如果 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$ 是函数，则 $gf:X\to Z$ 是如下定义的函数：对所有 $x\in X$ 有 $gf(x)=g(f(x))$．有时将 gf 记为 $g\circ f$．我们注意到 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$；f 是 1-1 和满的当且仅当 $f^{-1}f=i_X$ 与 $ff^{-1}=i_Y$，这里 i_X 与 i_Y 分别是由 X 到 X 与由 Y 到 Y 的恒等函数．

§2　连续函数(映射)

我们现在能够定义由一个空间到另一个空间的连续函数或映射．引进的这个概念至少在直观上是表述 X 中互相接近的点经过 f 的作用之后在 Y 中仍是比较接近的这一事实．借助于邻域，我们已有接近的概念．于是可以作出如下定义．

2.1 定义　设 $(X,\mathscr{T})$ 与 $(Y,\mathscr{T}')$ 是拓扑空间，$f:X\to Y$ 是一个函数．设 $x\in X$，如果对每一个 $V\in\mathscr{U}_{f(x)}\in\mathscr{T}'$，存在 $U\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$，使得 $f(U)\subseteq V$，则称 f 在 x 连续．如果 f 在每一点 $x\in X$ 连续，则称函数 f 连续．

例子(和练习)

2.1 证明恒等函数 $i:X\to X$ 是连续的.

2.2 证明常值函数 $c:X\to Y$ 是连续的.

2.3 (a) 证明 $f:X\to Y$ 在 $x\in X$ 连续当且仅当对每一个 $V\in\mathscr{U}_{f(x)}$ 有 $f^{-1}(V)\in\mathscr{U}_x$.

(b) 证明如 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$ 连续, 则 $gf:X\to Z$ 连续.

象我们刚才在前面练习中看到的那样, 有它种方式定义函数在一点的连续性. 也有它种方式定义函数在空间 X 的连续性. 其中比较重要的给出如下.

2.2 定理 设 X 与 Y 是拓扑空间, $f:X\to Y$ 是一个函数, 则下列各条在逻辑上是等价的叙述.

(1) f 连续.

(2) 对每一个开集 $O\subseteq Y$, $f^{-1}(O)$是 X 中的开集.

(3) 对每一个闭集 $C\subseteq Y$, $f^{-1}(C)$是 X 中的闭集.

(4) 如果 $A\subseteq X$, 则 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

注: 下面证明中使用的符号"$\Rightarrow$"读为"蕴涵". 我们用这样的方法证明这个定理, 每一个论述蕴涵了下一个论述, 而最后一个论述蕴涵了第一个论述.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 设 $x\in f^{-1}(O)$, 则 $f(x)\in O$. 由于 O 是开集, 所以 O 是 $f(x)$的邻域, 由 2.1 知存在 x 的邻域 V, 使得 $f(V)\subseteq O$, 因此 $V\subseteq f^{-1}(O)$, 从而 $f^{-1}(O)\in\mathscr{U}_x$. 根据 1.3 可知 $f^{-1}(O)$ 是开的.

(2)$\Rightarrow$(3) 设 $O=Y-C$, 则 O 是 Y 中的开集, 由(2)知 $f^{-1}(O)$ 是 X 中的开集, 因此 $X-f^{-1}(O)=[f^{-1}(O)]^c=f^{-1}(O^c)=f^{-1}(C)$ 是闭的.

(3)⇒(4) 我们注意到 $A\subseteq f^{-1}[f(A)]\subseteq f^{-1}[\overline{f(A)}]$. 由于 $\overline{f(A)}$ 是闭的, 根据(3), $f^{-1}[\overline{f(A)}]$ 也是闭的, 根据 1.11(1), $\overline{A}\subseteq f^{-1}[\overline{f(A)}]$, 因此 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

(4)⇒(1) 设 $x\in X$, U 是 Y 中 $f(x)$ 的邻域. 选择开集 O, 使得 $f(x)\in O\subseteq U$, 设 $V=[f^{-1}(O^c)]^c$. 则因 $f(x)\in O$, 故 $f(x)\notin O^c$, 因此 $x\notin f^{-1}(O^c)$, 从而 $x\in V$. 我们现在只需证明 $f^{-1}(O^c)$ 是闭的, 则 V 就是开的, 因此 V 是 x 的邻域, 又有

$$f(V)=f([f^{-1}(O^c)]^c)=f(f^{-1}[(O^c)^c])=f(f^{-1}(O))\subseteq O.$$

现在证明 $f^{-1}(O^c)$ 是闭的. 因为在任何情况下都有 $f^{-1}(O^c)\subseteq\overline{f^{-1}(O^c)}$, 又根据(4), 可有

$$f(\overline{f^{-1}(O^c)})\subseteq\overline{f(f^{-1}(O^c))}\subseteq\overline{O^c}=O^c,$$

从而我们有 $$\overline{f^{-1}(O^c)}\subseteq f^{-1}(O^c),$$

因此 $\overline{f^{-1}(O^c)}=f^{-1}(O^c)$, 所以 $f^{-1}(O^c)$ 是闭的. ▮

前面这个定理是重要的, 因为经常需要证明函数的连续性, 而这个定理给出了证明函数连续性的几个方法. 映射对连续函数是有用的术语. 从现在起, 我们称为映射的任何函数将意味着是连续的.

在映射下保留了拓扑空间许多有用的和重要的性质. 这就是说, 如果 X 是具有某性质 P 的拓扑空间, $f:X\to Y$ 是到拓扑空间 Y 的映射, 则经常是 Y 也具有性质 P(这不仅取决于性质 P, 而且在某种程度上也取决于空间 X 和 Y 的结构). 这种性质的几个例子给出在下面的定理中.

2.3 定理 设 X 和 Y 是拓扑空间, $f:X\to Y$ 是1-1映射, $A\subseteq X$, $x\in A'$, 则 $f(x)\in f(A)'$.

证明 设 U 是 $f(x)$ 的邻域, 由 2.1 知存在 x 的邻域 V, 使得 $f(V)\subseteq U$. 由于 $x\in A'$, 故存在 $y\neq x$, $y\in V$ 且 $y\in A$, 所以 $f(y)\in f(V)\subseteq U$ 与 $f(y)\in f(A)$ 成立. 又因为 f 是 1-1 的, 因而 $f(y)$

$\neq f(x)$. 这样, 在 $f(x)$ 的每一个邻域 U 中存在点 $f(y)\neq f(x)$, 使得 $f(y)\in f(A)$, 所以 $f(x)\in f(A)'$. ▌

2.4 定理 设 X 是可分空间, $f:X\to Y$ 是 X 到 Y 的满映射, 则 Y 是可分的.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 X 的可数稠密子集, 则 $\{f(x_n)\}\subseteq Y$ 也是可数的. 我们进一步证明 $\{f(x_n)\}$ 在 Y 中稠密. 设 $y\in Y$, U 是 y 的任意一个邻域, 则存在 $x\in X$, 使得 $f(x)=y$ 且存在 $V\in \mathscr{U}_x$, 使得 $f(V)\subseteq U$. 因为 $\{x_n\}$ 在 X 中稠密, 故存在整数 i, 使得 $x_i\in V$, 所以 $f(x_i)\in f(V)\subseteq U$, 因而 $\{f(x_n)\}$ 在 Y 中稠密. ▌

注 在上一个定理中, 因为 $f:X\to Y$ 是满映射, 我们称 Y 是 X 的连续象.

§3 同 胚

对于两个空间, 如果一个是另一个的连续象, 则它们自然在某种程度上有关系. 然而, 在我们下面定义的空间之间有着更密切的关系.

2.5 定义 设 X 和 Y 是拓扑空间, $f:X\to Y$ 是 X 到 Y 的一一满函数(因此 f^{-1} 也是函数), 又设 f 和 f^{-1} 都是连续的, 则称 f 为同胚.

如果在 X 与 Y 之间存在同胚 $f:X\to Y$, 则记为 $X\sim Y$. 我们注意到, 空间之间的关系 $X\sim Y$ 是一个等价关系. 因为由 X 到 X 的恒等函数说明这个关系具有自反性. 又, 如果 $f:X\to Y$ 是同胚, 则 $f^{-1}:Y\to X$ 同样是同胚. 最后, 如果 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$ 都是同胚, 则 $gf:X\to Z$ 也是同胚. 由此我们看到关系"$\sim$"具有对称性与传递性. 因此, 如果由 X 到 Y 存在同胚(由于关系"$\sim$"的对称性, 因而在 X 与 Y 之间存在同胚), 则我们可以说空间 X 与 Y 是同胚的, 也可以说 Y 是 X 的同胚象.

在这里我们稍微谈一点别的．我们方才正谈论拓扑空间所成集族上的一个等价关系．如读者所知，集合上的每一个等价关系将这个集合划分为等价类

$$[X]=\{Y|Y\text{ 与 }X\text{ 等价}\}.$$

在我们所考察情况下的$[X]$是所有与 X 同胚的空间所成的集合．拓扑学的问题之一是对熟知的空间 X，不用与 X 同胚这样的术语来刻划$[X]$的元素．例如，如果 $X=[0,1]$具有实直线寻常拓扑的相对拓扑，是否能够给出空间 Y 的某些特征性质，当且仅当 Y 具有这些性质时保证 $Y\in[X]$？回答是"能"，虽然在这本书中我们不去进一步讨论怎样得到这个结果．有兴趣的读者可以在更高深的拓扑学课本中进一步学习这些内容*．现在让我们回到讨论的主题上来．

我们最终研究的空间的许多性质是被同胚保留的性质．明确地说，如果能由 X 具有性质 P 且 X 与 Y 同胚得出 Y 也具有性质 P，则称性质 P 被同胚保留．这样的性质称为**拓扑性质**．这里我们指出任何被连续函数保留的性质也必然被同胚保留．这样，2.4 就证明了可分性是拓扑性质．

在我们继续研究同胚之前，还有几个描述函数的术语是有用的．这些术语由下一个定义给出．

2.6 定义 设 $f:X\to Y$ 是函数，X 与 Y 是拓扑空间．如果对每一个开集 $O\subseteq X$，$f(O)$是 Y 中的开集，则称 f 是**开函数**（有时称为**内函数**）．如果对每一个闭集 $C\subseteq X$，$f(C)$是 Y 中的闭集，则称 f 是**闭函数**．

例子（和练习）

2.4 证明 $f:X\to Y$ 是同胚当且仅当 f 是满的一一开映射．

* 例如，参看 J. G. Hocking 与 G. S. Young 著的"Topology"(1961)第 129 页．

2.5 证明 $f: X\to Y$ 是同胚当且仅当 f 是满的一一闭映射.

2.6 设 $f: X\to Y$ 是映射, $Z\subseteq X$ 是 X 的子空间. 证明 f 在 Z 上的限制 $f|Z: Z\to Y$ 也是映射.

2.7 设 R 是具有寻常拓扑的实直线, 又设

$$K=\{(x, y)\mid x, y\in R, x^2+y^2=1\}$$

是具有平面寻常拓扑的相对拓扑的单位圆. 设 $f: R\to K$ 由 $f(x)=(\cos\pi x, \sin\pi x)$ 定义, 也就是说, f 将实直线绕着单位圆一圈又一圈地缠绕. 如下证明 f 不是闭的: 证明集合

$$S=\{2n+1/n\mid n=1, 2, 3, \cdots\}$$

是 R 的闭子集, 但 $f(S)$ 在 K 中不闭. 注意, f 是开的和连续的.

2.8 设 $I_1=[-3, 3]$ 具有实直线的相对拓扑. 由

$$f(x)=\frac{1}{6}(x^3-3x)$$

定义 $f: I_1\to I_1$. 考虑集合 $S=\{x\mid x\in I_1, 0<x\leq 3\}$ 说明 f 不是开函数. 但显然 f 是连续的. 在后面我们将看到 f 也是闭的.

因为一个函数是同胚比它仅是连续的需要更多的条件, 因此我们有理由希望在同胚下保留的性质比在映射下保留的性质更多. 情况的确如此, 下面几个定理即可说明这一点.

2.7 定理 设 X 和 Y 是拓扑空间, $f: X\to Y$ 是同胚. 如果 X 是 Hausdorff 空间, 则 Y 也是 Hausdorff 空间.

证明 设 $y_1, y_2\in Y$ 且 $y_1\neq y_2$. 由于 f 是一一且满的, 存在唯一的一对点 x_1 与 x_2, 使得 $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$. 因为 X 是 Hausdorff 空间, 故存在不相交的开集 U_1 与 U_2, 使得 $x_1\in U_1$ 与 $x_2\in U_2$. 因为 f 是开函数, 因此 $f(U_1)$ 与 $f(U_2)$ 是 Y 中的开集, 又因为 f 是一一的, 所以 $f(U_1)$ 与 $f(U_2)$ 不相交. 最后我们注意

到 $y_1\in f(U_1)$ 和 $y_2\in f(U_2)$，因此 Y 是 Hausdorff 空间。▌

2.8 定理 设 X 和 Y 是拓扑空间，$f: X\to Y$ 是同胚，又设 X 有可数基，则 Y 也有可数基。

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基，又设 $\mathscr{B}'=\{f(B)\mid B\in\mathscr{B}\}$。因为 f 是开的，故而 $\mathscr{B}'$ 是开集族。又因为 $\mathscr{B}$ 是可数的，因此 $\mathscr{B}'$ 也是可数的。现在设 $y\in Y$, $U\in\mathscr{U}_y$，则存在 $x\in X$, $V\in\mathscr{U}_x$, $B\in\mathscr{B}$，使得 $B\subseteq V$，并且

$$y=f(x)\in f(B)\subseteq f(V)\subseteq U.$$

设 $B'=f(B)$，则我们看到存在 $B'\in\mathscr{B}'$，使得 $y\in B'\subseteq U$，因此 $\mathscr{B}'$ 是 Y 的基。▌

前面的定理能够更简明地叙述为成为 Hausdorff 空间这个性质（或具有可数基这个性质）是拓扑性质。

例子(和练习)

2.9 设 $f: X\to Y$ 是函数，X 具有离散拓扑，则 f 是连续的。

2.10 设 $f: X\to Y$ 是函数，Y 具有平庸拓扑，则 f 是连续的。

2.11 如果 $f: X\to Y$ 是连续的，X 是 Hausdorff 空间，用例子说明 Y 不必是 Hausdorff 空间。

2.12 证明 $f: X\to Y$ 是连续函数当且仅当对每一个 $B\in\mathscr{B}$($\mathscr{B}$ 是 Y 的基)，$f^{-1}(B)$ 是 X 中的开集。

2.13 设 $f: X\to Y$ 是连续函数，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列而且 $\lim_n x_n=x$，证明 $\lim_n f(x_n)=f(x)$。

2.14 设 $f: X\to Y$ 是函数，证明 f 是连续函数当且仅当对每一个 $B\subseteq Y$，有 $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$。用例子说明这里将"$\subseteq$"换成"$\subset$"后的真包含关系有时可能成立。

2.15 设 X 和 Y 是拓扑空间，$X\times Y$ 是它们的积空间，对每一点 $(x, y)\in X\times Y$，用 $P_X((x, y))=x$ 与 $P_Y((x, y))=y$ 定

义 $P_X: X\times Y\to X$ 与 $P_Y: X\times Y\to Y$. 证明 P_X 与 P_Y 是连续开函数. P_X 与 P_Y 称为由 $X\times Y$ 到 $X\times Y$ 的坐标(或因子)空间的射影.

2.16 设 R 是具有寻常拓扑的实直线, 又设 X 是具有在1.6中定义的拓扑的实直线, 即是这个拓扑的开集或者是有限集的余集,或者是空集,也即是说

$$\mathscr{O}=\{O|O=\phi \text{ 或 } O^c \text{ 是有限集}\}.$$

定义 $f: R\to X$ 为 $f(x)=x$. 证明 f 是一一连续函数但 f^{-1} 不连续.

2.17 (a) 设 X 和 Y 是拓扑空间, Y 是 Hausdorff 空间, $f: X\to Y$ 与 $g: X\to Y$ 是映射. 又设

$$E=\{x|x\in X,\ f(x)=g(x)\},$$

则 E 是闭集.

(b) 进一步设 $D\subseteq X$ 是 X 的稠密子集, 如果 $D\subseteq E$, 则 $f=g$[也就是说 $f(x)=g(x)$对所有 $x\in X$ 成立].

(c) 设 f 是定义在有理数集上的实变量实值连续函数. 证明最多存在一个定义在实数集上的实值连续函数 g, 使得当 x 是有理数时 $f(x)=g(x)$.

2.18 设 $f: X\to Y$ 是函数, 证明 f 是连续函数当且仅当对每一个 $S\in\mathscr{S}$, $f^{-1}(S)$是 X 中的开集, 这里 $\mathscr{S}$ 是 Y 的拓扑的次基.

2.19 设 $f: X\to Y$ 是映射, $A\subseteq X$ 且 A 具有相对拓扑, 则 $f|A: A\to Y$ 是连续的.

2.20 在具有寻常拓扑的实直线上, 任意两个开区间作为子空间是同胚的. [如果将"开"换成"闭", 类似的论述仍然成立.]

2.21 第二可数空间的连续象是否仍然是第二可数的?

§4 积 空 间

方才的练习 2.15 给我们指出了将积拓扑的概念扩充到任意

多个因子空间的笛卡儿积的方法．让我们从两个空间 X_1 和 X_2 的积开始．$X_1\times X_2$ 中的点 (x_1, x_2) 可以看作是集合 $\{1, 2\}$ 上的函数，这个函数在 $1\in\{1, 2\}$ 的值是 x_1，在 $2\in\{1, 2\}$ 的值是 x_2．这样，可以认为 $X_1\times X_2$ 是由集合 $\{1, 2\}$ 上的全体函数 $x(i)$ $(i=1, 2)$ 所成的集合（函数 $x(i)$ 使 $x(1)\in X_1$，$x(2)\in X_2$）．当然，我们宁愿将 $x(1)$ 和 $x(2)$ 表示为 x_1 和 x_2．现在用要求每一个射影 $P_{X_i}(i=1, 2)$ 是连续的这一性质向集合 $X_1\times X_2$ 引入一个拓扑．要求 $P_{X_i}^{-1}(U_i)$ $(i=1, 2)$ 是开的就能作到这一点，其中 $U_i\subseteq X_i$ 是 X_i 中的开集 $(i=1, 2)$．总之，积空间 $X_1\times X_2$ 能够认为是集合 $\{1, 2\}$ 上的所有函数 x（x 在 $i\in\{1, 2\}$ 的值是 x_i）所成的集合并具有由次基

$$\{P_{X_i}^{-1}(U_i)\,|\,U_i\in\mathscr{O}_i,\ \mathscr{O}_i \text{ 是 } X_i \text{ 的开集族},\ i=1, 2\}$$

所产生的拓扑．将指标集 $\{1, 2\}$ 一般化，对任意的指标集 A，给出如下定义．

2.9 定义　设 A 是指标集，$X_\alpha(\alpha\in A)$ 是拓扑空间，则积空间 $\bigtimes_{\alpha\in A} X_\alpha$ 定义为具有如下拓扑的所有 A 上的函数 x 所成的集合，其中函数 x 在 $\alpha\in A$ 的值 $x_\alpha\in X_\alpha$，所说的拓扑是由次基

$$\{P_{X_\alpha}^{-1}(U_\alpha)\,|\,U_\alpha\in\mathscr{O}_\alpha,\ \mathscr{O}_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 的开集族},\ \alpha\in A\}$$

产生的拓扑，而 $P_{X_\alpha}(x)=x_\alpha$ 是 $\bigtimes_{\alpha\in A} X_\alpha$ 到第 α 个坐标空间 X_α 的射影．

在引入定义前的背景性讨论中，要求每一个 P_{X_i} 具有连续性．因此下面定理的正确性是很自然的．

2.10 定理　设 $X=\bigtimes_{\alpha\in A} X_\alpha$ 是空间 X_α 的积空间，A 是某个指标集．设 $P_{X_\beta}(x)=x_\beta$ 是由 X 到 X_β 上的射影，则 P_{X_β} 是开函数且是连续的．

证明　我们首先证明连续性．设 $x\in X$，又设 U 是 $x_\beta\in X_\beta$ 的

邻域．取开集 V，使得 $x_\beta \in V \subseteq U$．根据2.9，$P_{X_\beta}^{-1}(V)$ 是 X 中的开集而且 $x \in P_{X_\beta}^{-1}(V)$，因此 $P_{X_\beta}^{-1}(V)$ 是 x 的邻域．最后，$P_{X_\beta}(P_{X_\beta}^{-1}(V)) = V \subseteq U$，因此 P_{X_β} 是连续的．

现在证明 P_{X_β} 是开的．设 U 是 X 中的开集且 $x \in U$（如果 $U = \phi$ 则显然没有什么可证的了），则 U 是 x 的邻域．因为 U 是基元形成的邻域的并，因此我们可以假设 U 本身是基元形成的邻域，从而 U 是次基中有限个元素形成的邻域的交，也就是说

$$U = \bigcap_{\alpha \in F} P_{X_\alpha}^{-1}(U_\alpha)$$

这里 $F \subseteq A$，F 是有限集，U_α 是 X_α 中的开集．

如果 $\beta \in F$，设 $y \in U$，则因 $y \in P_{X_\beta}^{-1}(U_\beta)$，

$$P_{X_\beta}(y) \in P_{X_\beta}(P_{X_\beta}^{-1}(U_\beta)) = U_\beta \quad \text{从而} \quad P_{X_\beta}(U) = U_\beta,$$

由此，如果 $\beta \in F$，则 P_{X_β} 是开的．

如果 $\beta \notin F$，我们希望证明 $P_{X_\beta}(U) = X_\beta$．为此目的，设 $\tilde{z}_\beta \in X_\beta$．作点 $z \in X$，使得对 $\alpha \in F$ 有 $z_\alpha = x_\alpha \in U_\alpha$，并且 $z_\beta = \tilde{z}_\beta$ 以及对 F 之外且异于 β 之指标 γ，z_γ 可任意取定．则因对每一个 $\alpha \in F$，有 $x_\alpha \in U_\alpha$，$z \in P_{X_\alpha}^{-1}(U_\alpha)$，所以 $z \in U$ 且 $P_{X_\beta}(z) = \tilde{z}_\beta$．因此 $P_{X_\beta}(U) = X_\beta$，而 X_β 是 X_β 中的开集，因此对 $\beta \notin F$，P_{X_β} 也是开的．从而在任何情况下 P_{X_β} 都是开的．▌

我们应当在这里指出几点．首先，P_{X_β} 不必是闭的．例如，在 $R \times R$ 中，集合

$$\{(x,\ y) \mid y = 1/(x - x^2),\ 0 < x < 1\}$$

是闭的，但这个集合在 x 轴上的射影是开单位区间，这不是一个闭集．其次应当强调，如果 U_α 在 X_α 中是开的，不一定能得出 $\underset{\alpha \in A}{\times} U_\alpha$ 是 X 中的开集，因为一般说来不可能将 $\underset{\alpha \in A}{\times} U_\alpha$ 表示为有限个次基集合之交的并．当然，如果 A 恰是有限集，则 $\underset{\alpha \in A}{\times} U_\alpha$ 是开集，但如果 A 是无限集，$\underset{\alpha \in A}{\times} U_\alpha$ 就不一定是开集了．

现在证明在后面许多定理中有广泛用途的两个定理.

2.11 定理 设 $f:Y\to\bigtimes_{\alpha\in A}X_\alpha$ 是函数，则 f 是连续函数当且仅当复合函数 $P_{X_\alpha}f:Y\to X_\alpha$ 对每一个 $\alpha\in A$ 都连续.

证明 如果 f 连续，根据 2.10, P_{X_α} 也连续，因此 $P_{X_\alpha}f$ 连续. 反过来，设对每一个 $\alpha\in A$, $P_{X_\alpha}f$ 都连续，又设 U_α 是 X_α 中的开集，则

$$(P_{X_\alpha}f)^{-1}(U_\alpha)=f^{-1}[P_{X_\alpha}^{-1}(U_\alpha)]$$

是 Y 中的开集. 因为 $P_{X_\alpha}^{-1}(U_\alpha)$ 是 X 的拓扑的次基中的任意一个元素，根据练习 2.18, f 是连续的. ▌

2.12 定理 设 X 和 Y 是拓扑空间，$f:X\to Y$ 是函数. 由 $F(x)=(x, f(x))$ 定义 $F:X\to X\times Y$. 则 f 是连续函数当且仅当 F 是 X 与 $X\times Y$ 的子空间 $G=\{(a, f(a))\,|\,a\in X\}$ 之间的同胚.

证明 设 F 是 X 与 G 之间的同胚，根据 2.11, P_YF 是连续的. 而 $P_YF:X\to Y$ 由 $(P_YF)(x)=f(x)$ 定义，因此 $P_YF=f$, 所以 f 是连续的.

反之，设 f 是连续函数. 我们由 2.10 知道 $P_X:X\times Y\to X$ 是连续的，因此 $P_X|G$ 是连续的. 注意到 $(P_X|G)(x, f(x))=x$, 因此 $P_X|G=F^{-1}$, 所以 F^{-1} 是连续的. 又 F 显然是一一满函数. 这样一来我们只需证明 F 是连续函数即可.

由于 $P_XF:X\to X$ 由 $P_XF(x)=P_X[(x, f(x))]=x$ 定义，所以 P_XF 是 X 上的恒等函数，因此 P_XF 是连续的. 又 $P_YF:X\to Y$ 由 $P_YF(x)=P_Y[(x, f(x))]=f(x)$ 定义，因此 $P_YF=f$ 且由假设 f 是连续的. 由 P_XF 与 P_YF 的连续性，根据 2.11, F 是连续的. 由此，F 是同胚. ▌

用字母 G 表示前面定理谈到的集合不是偶然的，因为集合 G 可以看作是函数 f 的“图形”(译注：英语“图形”(Graph)一词的第一个字母是 G). 因此，2.12 换一种说法就是，$f:X\to Y$ 是连续函

数当且仅当在同胚 $F(x)=(x, f(x))$ 下，X 与 f 的图形同胚.

例子(和练习)

2.22 设 A 是指标集，对每一个 $\alpha\in A$，X_α 是拓扑空间，$\underset{\alpha\in A}{\times} X_\alpha$ 是积空间. 设 $\beta\in A$ 是一个确定的元素，对每一个 $\alpha\neq\beta$，设 $x'_\alpha\in X_\alpha$ 是某个固定点. 定义

$$X'_\beta=\{x \mid \text{对 } \alpha\neq\beta,\ x_\alpha=x'_\alpha,\ x_\beta \text{ 是任意的}\},$$

则 $X'_\beta\subseteq \underset{\alpha\in A}{\times} X_\alpha$ 且 X'_β 与 X_β 同胚.

2.23 用前面的练习证明点集

$$R'=\{(x,\ 1) \mid x\in R\}$$

是平面的子集且与实直线同胚.

第三章 几种特殊类型的拓扑空间（各种紧性）

在这一章中，我们研究施加到空间上的几种特殊限制，以使空间获得若干所希望的有趣性质.不是每一个拓扑空间都满足这些限制，在这种意义下可以说这些限制是特殊的. 然而它们仍然相当普遍，我们经常在分析、代数拓扑以及别处遇到的许多重要而又有趣的拓扑空间都具有一种或几种这样的性质.

§1 紧 空 间

在开始研究第一个特殊性质之前，我们需要一个预备概念如下.

3.1 定义 设 X 是一个集合，$Y\subseteq X$，且

$$\{D_\alpha|\alpha\in A,\ A\text{ 是一个指标集}\}$$

是 X 的一个子集族. 如果 $\bigcup_{\alpha\in A} D_\alpha\supseteq Y$，则称 $\{D_\alpha\}$ 是 Y 的**覆盖**.

如果覆盖的所有集合 D_α 具有某个共同性质 P，则称这个覆盖为 P-覆盖. 例如，如果每一个 D_α 是开集，则称 $\{D_\alpha\}$ 是开覆盖. 又，如果 $\{E_\beta|\beta\in B\}\subseteq\{D_\alpha|\alpha\in A\}$ 且 $\bigcup_{\beta\in B} E_\beta\supseteq Y$，则称 $\{E_\beta|\beta\in B\}$ 是 $\{D_\alpha|\alpha\in A\}$ 的子覆盖. 我们也可以用指标集 A 的性质来刻划集合 Y 的覆盖. 例如，如果 A 是有限集，则称 $\{D_\alpha|\alpha\in A\}$ 是有限覆盖. 如果 A 是可数集，则称 $\{D_\alpha|\alpha\in A\}$ 是可数覆盖.

当然，这里有某些含糊不清的地方，因为"覆盖"这个词前面的形容词可能指的是集合 D_α 的某个共同性质，也可能指的是指标集 A 的某个性质. 然而，根据上下文的意思常常只能允许一种解

释. 如果可能不止一种解释，我们将指明形容词说的是 A 的性质还是说的是 D_a 的某个共同的性质.

我们所研究的空间的第一种性质称为紧性. 下面给出它的定义.

3.2 定义 X 是拓扑空间，如果 X 的每一个开覆盖都包含有限子覆盖，则称 X 是紧的.（这里"开"指的是 D_a 的性质，"有限"指的是指标集 A 的性质.）

如下形象地描述这个概念可能对我们有帮助. 假设一大群人（可能有无限多人）坚持站在雨中. 他们每一个人都撑着自己的伞，因此都不会被雨淋湿. 当然，有可能他们紧紧地挤在一起，以至不是每一个人而是只需要有限个人撑着自己的雨伞就能使全体不被雨淋湿. 我们想象他们形成了某类紧空间. 其中自然要假设所有雨伞都是开的.

例子(和练习)

3.1 (a) 任意闭区间 $[a, b]$ $(-\infty<a\leq b<\infty)$，若它具有实直线寻常拓扑的相对拓扑，则它是紧空间.（这是 Heine-Borel 定理的一种叙述.）

(b) 更一般地，对实直线任意闭的有限子集，如果它具有实直线寻常拓扑的相对拓扑，则它是紧空间.

3.2 设 X 是具有右序拓扑的偏序集，且 X 有最小元素（也就是说存在 $x\in X$，使得对所有 $y\in X$ 都有 $x\leq y$），则 X 是紧的.

应当注意，拓扑空间紧性概念起源于 Heine-Borel 定理. 这个定理（稍微不同于前面的说法）是说，在实直线中，如果 K 是闭的有界集合，$\{I_\alpha | \alpha\in A\}$ 是开区间所成的集合且 $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha\supseteq K$，则有限个 I_α 就能覆盖 K.

由 3.2 得出的一个简单但相当有用的结果是下面的定理.

3.3 定理 设 X 是拓扑空间，则 X 是紧空间当且仅当对 X 的每一个闭集族 $\{C_\alpha|\alpha\in A\}$，如果 $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha=\phi$，则存在有限集 $F\subseteq A$，使得 $\bigcap_{\alpha\in F} C_\alpha=\phi$.

证明 设 X 是紧的，$\{C_\alpha|\alpha\in A\}$ 是闭集族且其交是空集. 定义 $O_\alpha=C_\alpha^c$，则 O_α 是开的而且

$$\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A} C_\alpha^c=[\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha]^c=\phi^c=X.$$

根据 3.2，存在有限集 $F\subseteq A$，使得 $\bigcup_{\alpha\in F} O_\alpha=X$，因此

$$\phi=X^c=[\bigcup_{\alpha\in F} O_\alpha]^c=\bigcap_{\alpha\in F} O_\alpha^c=\bigcap_{\alpha\in F} C_\alpha.$$

反过来的证明留作练习. ▌

除了在 3.3 中得到的结果外，我们还希望得到紧性的某些等价条件. 为此，讨论空间 X 的子集族的又一个性质是有用的.

3.4 定义 设 X 是集合，$\{D_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 X 的子集族. 如果对 A 的任意有限非空子集 F，都有 $\bigcap_{\alpha\in F} D_\alpha\neq\phi$，则称 $\{D_\alpha\}$ 具有**有限交性**.

紧性的下面两个等价叙述将对我们今后的工作很有用处.

3.5 定理 空间 X 是紧的当且仅当对具有有限交性的任意闭集族 $\{D_\alpha|\alpha\in A\}$，$\bigcap_{\alpha\in A} D_\alpha\neq\phi$.

证明 设 X 是紧空间，$\{D_\alpha|\alpha\in A\}$ 是具有有限交性的闭集族. 若 $\bigcap_{\alpha\in A} D_\alpha=\phi$，则由 3.3 知存在有限集 $F\subseteq A$，使得 $\bigcap_{\alpha\in F} D_\alpha=\phi$，这与 $\{D_\alpha|\alpha\in A\}$ 具有有限交性矛盾. 由此 $\bigcap_{\alpha\in A} D_\alpha\neq\phi$.

反之，设 $\{O_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 X 的开覆盖. 若对每一个有限集合 $F\subseteq A$，$\bigcup_{\alpha\in F} O_\alpha\not\supseteq X$，也就是说 $(\bigcup_{\alpha\in F} O_\alpha)^c\neq\phi$. 定义 $D_\alpha=O_\alpha^c$，则 D_α 是闭集且对任意有限集 $F\subseteq A$，都有

$$\bigcap_{\alpha\in F} D_\alpha=\bigcap_{\alpha\in F} O_\alpha^c=(\bigcup_{\alpha\in F} O_\alpha)^c\neq\phi.$$

这样，$\{D_\alpha\}$ 是具有有限交性的闭集族．由假设有

$$\bigcap_{\alpha\in A} D_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A} O_\alpha^c=(\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha)^c\neq\phi$$

或 $\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha\subsetneq X$．后面这个结论与 $\{O_\alpha\}$ 是 X 的覆盖矛盾．这个矛盾说明的确存在有限集 $F\subseteq A$，使得 $\bigcup_{\alpha\in F} O_\alpha=X$，因此 X 是紧空间．■

3.6 定理　设 X 是拓扑空间，则 X 是紧空间当且仅当对 X 的具有有限交性的任意子集族 $\{D_\alpha|\alpha\in A\}$，$\bigcap_{\alpha\in A}\overline{D}_\alpha\neq\phi$.

证明　设 X 是紧空间．则因对每一个 α 有 $\overline{D}_\alpha\supseteq D_\alpha$，且 $\{\overline{D}_\alpha|\alpha\in A\}$ 显然是具有有限交性的闭集族，根据 3.5 可得出 $\bigcap_{\alpha\in A}\overline{D}_\alpha\neq\phi$.

反之，设 $\{D_\alpha|\alpha\in A\}$ 是任意具有有限交性的集族且其中全体集合的闭包的交不空．现在，设 $\{C_\alpha|\alpha\in A\}$ 是具有有限交性的闭集族，则 $\overline{C}_\alpha=C_\alpha$ 且

$$\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A}\overline{C}_\alpha\neq\phi,$$

根据 3.5，X 是紧空间．■

练　　习

3.3　证明定理 3.3 未证明的部分.

现在我们讨论在映射下保持紧性的问题.

3.7 定理　设 $f:X\to Y$ 是满映射且 X 是紧的，则 Y 也是紧的.

证明　设 $\{O_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 Y 的开覆盖．根据 2.2(2)，由于 f 是连续的，因此对每一个 α，$f^{-1}(O_\alpha)$ 是 X 中的开集．故

$$\{f^{-1}(O_\alpha)|\alpha\in A\}$$

是 X 的开覆盖. 由于 X 是紧空间,因而存在有限集 $F\subseteq A$, 使得 $\{f^{-1}(O_\alpha)\,|\,\alpha\in F\}$ 是 X 的覆盖. 最后,因为 f 是满的,所以有

$$\{f(f^{-1}(O_\alpha))\,|\,\alpha\in F\}=\{O_\alpha\,|\,\alpha\in F\}$$

是 Y 的覆盖,因此 Y 是紧空间. ▮

现在我们注意到,作为前面定理一个简单的推论,紧性是拓扑性质,也就是说:

3.8 定理 设 X 和 Y 是同胚的空间, X 是紧空间, 则 Y 也是紧空间.

我们现在简要地研究紧性与闭集之间的某些关系.

3.9 定理 设 X 是 Hausdorff 空间, Y 是 X 中的紧子空间, 则 Y 是 X 的闭子集.

证明 我们证明 Y^c 是开的. 为此目的, 设 $x\in Y^c$. 对每一点 $y\in Y$, 根据1.4, 存在开邻域 O_{xy} 与 O_y, 使得 $x\in O_{xy}$, $y\in O_y$ 和 $O_{xy}\cap O_y=\phi$(因为 X 是 Hausdorff 空间). 现在 $\{O_y\cap Y\,|\,y\in Y\}$ 是 Y 的开覆盖,因为 Y 在相对拓扑中是紧的, 因此存在有限集 F,使得

$$Y=\bigcup_{y\in F}(O_y\cap Y).$$

定义 $O=\bigcap_{y\in F}O_{xy}$, 则 $x\in O$ 且 O 是开集,因此 O 是 x 的邻域. 又

$$O\cap Y=O\cap(\bigcup_{y\in F}(O_y\cap Y))\subseteq O\cap(\bigcup_{y\in F}O_y)=\phi.$$

因为, 如果有 $z\in O\cap(\bigcup_{y\in F}O_y)$, 则应有某一个 $y'\in F$,使得 $z\in O_{y'}$, 可是

$$z\in O=\bigcap_{y\in F}O_{xy}\subseteq O_{xy'},$$

因此 $O_{y'}\cap O_{xy'}\neq\phi$, 这与 $O_{xy'}$ 及 $O_{y'}$ 的选取矛盾.

最后, 因为 $O\cap Y=\phi$, $x\in O\subseteq Y^c$, 因此 Y^c 是开的. 由此得出 Y 是闭的. ▮

3.10 定理 设 X 是紧空间, Y 是 X 的闭子集, 则 Y 是紧的

(在相对拓扑中).

证明 设 $\{O_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 Y 的开覆盖(在 Y 的相对拓扑中),也就是说 O_α 是 Y 中的开集. 则由 1.18 知 $O_\alpha=Y\cap O'_\alpha$, 其中 O'_α 是 X 中的开集. 又注意到 Y^c 是开的, 因此

$$\{D_\alpha|D_\alpha=O'_\alpha \quad 或 \quad D_\alpha=Y^c\}$$

是 X 的开覆盖. 因为对 $x\in X$, 则或者 $x\in Y^c$, 或者

$$x\in Y\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}O_\alpha\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}O'_\alpha.$$

因为 X 是紧空间, 故存在有限集 $F\subseteq A$, 使得

$$(\bigcup_{\alpha\in F}D_\alpha)\cup Y^c=X,$$

从而 $\bigcup_{\alpha\in F}D_\alpha\supseteq Y$, 这里的每个 D_α 形如 O'_α, 所以 $Y\subseteq\bigcup_{\alpha\in F}D_\alpha=\bigcup_{\alpha\in F}O'_\alpha$. 因此, 最后我们有

$$Y=\bigcup_{\alpha\in F}(O'_\alpha\cap Y)=\bigcup_{\alpha\in F}O_\alpha.$$

由此得出 Y 是紧的. ▌

直到现在为止, 提出的问题与它的解答(由定理给出)相对说来是容易的. 下面我们来讨论一个以前没有遇到过的这样困难的问题. 我们需要解答的问题是, 假如有一族空间 $X_\alpha(\alpha\in A$, A 是一个指标集), 而且每一个 X_α 都是紧空间, 问 $\underset{\alpha\in A}{\times}X_\alpha$ 是紧空间吗? 答案是肯定的. 这个问题将由 Tychonoff 给出的定理来回答. 为了得出问题的解答, 我们还需要少量的工具. 我们首先承认下述的 Zorn 引理, 这个引理实际上与选择公理等价.

8.11 引理(Zorn) 设 X 是偏序集, 且设 X 的每一个全序子集在 X 中有上界, 则 X 有最大元. [这就是说, 如果对每一个全序集 $Y\subseteq X$, 存在 $z\in X$, 使得由 $y\in Y$ 可得出 $y\leq z$, 则存在 $m\in X$, 使得对任意 $x\in X$, 或者 x 与 m 不能比较(也就是说 $x\leq m$ 与 $m\leq x$ 都不成立), 或者 $x\leq m$.]

我们不打算由选择公理得出这个引理．有兴趣的学生能在许多集合论的课本中找到它的证明．

在准备证明 Tychonoff 定理的过程中，我们首先证明一个其内容上集合论色彩比拓扑学色彩更强的引理．这个引理将相当多地缩短 Tychonoff 定理的证明．在证明 $\underset{\alpha\in A}{\times} X_\alpha$ 是紧空间时(其中每一个 X_α 都是紧空间)，我们希望利用有限交性，这就是下一个引理集中讨论具有有限交性的集合的原因．

8.12 引理 设 X 是一个集合，$\mathscr{F}=\{F\}$ 是 X 的具有有限交性的子集族，则存在 X 的具有下列性质的子集族 $\mathfrak{M}=\{M\}$：

(1) $\mathfrak{M}$ 具有有限交性．

(2) $\mathfrak{M}\supseteq\mathscr{F}$．

(3) 就性质 1 和 2 而论，$\mathfrak{M}$ 是最大的(也就是说，如果 $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}\neq\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}\supseteq\mathscr{F}$，则 $\mathfrak{N}$ 不具有有限交性)．

(4) $\mathfrak{M}$ 中任意有限个元素的交仍然是 $\mathfrak{M}$ 的元素．

证明 定义

$$\mathfrak{B}=\{\mathscr{G}\mid\mathscr{G}=\{G\},\ G\subseteq X,\ \mathscr{G}\supseteq\mathscr{F},\ \mathscr{G}\text{ 具有有限交性}\},$$

也就是说 $\mathfrak{B}$ 是具有有限交性而且包含 $\mathscr{F}$ 的 X 的子集族所成的集合．在 $\mathfrak{B}$ 中以如下方式引入偏序：$\mathscr{B}_1$，$\mathscr{B}_2\in\mathfrak{B}$，则 $\mathscr{B}_1\leq\mathscr{B}_2$ 表示 $\mathscr{B}_1\subseteq\mathscr{B}_2$．

现在证明具有偏序"$\leq$"的 $\mathfrak{B}$ 满足 Zorn 引理的条件．为此目的，设 $\{\mathscr{B}_\alpha\mid\alpha\in A,\ A\text{ 是某个指标集}\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的全序子集．定义 $\mathscr{B}=\bigcup_{\alpha\in A}\mathscr{B}_\alpha$，也就是说，$\mathscr{B}$ 的元素是诸 $\mathscr{B}_\alpha$ 中的每个集合．现在证明 $\mathscr{B}\in\mathfrak{B}$．首先，由于每个 $\mathscr{B}_\alpha\supseteq\mathscr{F}$，所以 $\mathscr{B}\supseteq\mathscr{F}$．又因为每一个 $B\in\mathscr{B}$ 都是某个 $\mathscr{B}_\alpha$ 的元素，因此 $B\subseteq X$．最后，我们必须证明 $\mathscr{B}$ 具有有限交性．为此，设 B_1，B_2，…，$B_k\in\mathscr{B}$．由 $\mathscr{B}$ 的定义，对每一个 i，都有 $B_i\in\mathscr{B}_{\alpha_i}$．因为 $\{\mathscr{B}_\alpha\}$ 是全序集，因此存在 $j(1\leq j\leq k)$，

使得对所有 $i(1\leq i\leq k)$，都有 $\mathscr{B}_{\alpha_i}\leqq\mathscr{B}_{\alpha_j}$. 这就是说对所有 $i(1\leq i\leq k)$，都有 $\mathscr{B}_{\alpha_i}\sqsubseteq\mathscr{B}_{\alpha_j}$. 因为 $\mathscr{B}_{\alpha_j}$ 具有有限交性且 $B_i\in\mathscr{B}_{\alpha_j}$ 对每一个 $i(1\leq i\leq k)$ 成立，因此

$$\bigcap_{i=1}^{k}B_i\neq\phi,$$

所以 $\mathscr{B}$ 具有有限交性. 最后，根据 $\mathscr{B}$ 的定义显然对每一个 α，都有 $\mathscr{B}\sqsupseteq\mathscr{B}_\alpha$，因此 $\mathscr{B}_\alpha\leq\mathscr{B}$. 所以 $\mathfrak{B}$ 的每一个全序子集在 $\mathfrak{B}$ 中有上界.

现在我们可以顺利地对 $\mathfrak{B}$ 应用 Zorn 引理. 我们已经看到，引入偏序的 $\mathfrak{B}$ 满足 Zorn 引理的条件，由此可设 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的最大元，因为 3.11 已经保证了这个最大元的存在. 因此 $\mathfrak{M}\in\mathfrak{B}$ 而且有

(1) $\mathfrak{M}$ 具有有限交性.

(2) $\mathfrak{M}\sqsupseteq\mathscr{F}$.

(3) 如果 $\mathfrak{N}\sqsupseteq\mathfrak{M}$，则 $\mathfrak{N}\geq\mathfrak{M}$. 假若 $\mathfrak{N}\sqsupseteq\mathscr{F}$ 且 $\mathfrak{N}$ 具有有限交性，则 $\mathfrak{N}\in\mathfrak{B}$. 因此如果 $\mathfrak{N}\neq\mathfrak{M}$ 则有 $\mathfrak{N}>\mathfrak{M}$，这与 $\mathfrak{M}$ 的最大性矛盾. 我们看到，就有限交性而论，$\mathfrak{M}$ 是最大的.

(4) 设 $M_1, M_2, \cdots, M_k\in\mathfrak{M}$，又设 $M_0=\bigcap_{i=1}^{k}M_i\neq\phi$(因为 $\mathfrak{M}$ 具有有限交性). 现在设 $\mathscr{M}'=\mathfrak{M}\cup\{M_0\}$ 且设 $N_1, N_2, \cdots, N_p\in\mathscr{M}'$. 如果 $N_i(1\leq i\leq p)$ 都是 $\mathfrak{M}$ 的元素，则由于 $\mathfrak{M}$ 具有有限交性，所以

$$\bigcap_{i=1}^{p}N_i\neq\phi.$$

如果对某个 j，有 $N_j=M_0$，则

$$\bigcap_{i=1}^{p}N_i=(\bigcap_{i\neq j}N_i)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{k}M_i\right)\neq\phi.$$

这里 $i\neq j$ 时 $N_i\in\mathfrak{M}$，由于 $\mathfrak{M}$ 具有有限交性，因此这个交是不空的. 又显然有 $\mathscr{M}'\sqsupseteq\mathfrak{M}$ 与 $\mathscr{M}'\sqsupseteq\mathscr{F}$，这样 $\mathfrak{M}\leq\mathscr{M}'$. 由于 $\mathfrak{M}$ 是最大的，故有 $\mathfrak{M}=\mathscr{M}'$，也就是说 $M_0\in\mathfrak{M}$. 所以 $\mathfrak{M}$ 的任意有限个元素

之交也是 $\mathfrak{M}$ 的元素. ▮

我们现在证明 Tychonoff 定理.

3.13 定理 设 X_α 是紧空间($\alpha\in A$, A 是指标集), 则具有积拓扑的 $X=\bigtimes_{\alpha\in A} X_\alpha$ 也是紧空间.

证明 设 $\mathscr{F}=\{F\}$ 是 X 的任意具有有限交性的子集族. 又设 $\mathfrak{M}$ 是满足下面四个条件的集族(它的存在已经由 3.12 保证).

(1) $\mathfrak{M}$ 具有有限交性.

(2) $\mathfrak{M}\supseteq\mathscr{F}$.

(3) 就有限交性而论 $\mathfrak{M}$ 是最大的.

(4) $\mathfrak{M}$ 中任意有限个元素的交仍然在 $\mathfrak{M}$ 中.

定义 $\mathfrak{M}_\alpha=P_{X_\alpha}\mathfrak{M}$, 也就是说 $M_\alpha\in\mathfrak{M}_\alpha$ 当且仅当对某一个 $M\in\mathfrak{M}$, 有 $M_\alpha=P_{X_\alpha}M$. 显然, $\mathfrak{M}_\alpha$ 保留了 $\mathfrak{M}$ 的有限交性. 又因为 X_α 是紧空间且 $\mathfrak{M}_\alpha$ 是 X_α 的子集族, 由 3.6 可以得出

$$\bigcap_{M_\alpha\in\mathfrak{M}_\alpha}\overline{M}_\alpha\neq\phi.$$

对每一个 α, 选取 $x_\alpha\in\bigcap_{M_\alpha\in\mathfrak{M}_\alpha}\overline{M}_\alpha$, 定义 $x=(x_\alpha)$, 也就是说点 x 的第 α 坐标是 x_α.

现在证明 $x\in\bigcap_{M\in\mathfrak{M}}\overline{M}$. 设 U 是 x 的邻域, 则存在基元 B, 使得 $x\in B\subseteq U$. 设

$$B=\bigcap_{i=1}^{k}S_i,$$

其中 S_i 是积拓扑的次基中的元素, 也就是说

$$S_i=\bigtimes_{\alpha\in A}Y_\alpha,\quad Y_\alpha=X_\alpha.$$

这里有可能有一个 α' 例外, 对它有 $Y_{\alpha'}=O_{\alpha'}$($O_{\alpha'}$ 是 $X_{\alpha'}$ 中的开集). 因为对每一个 i, 都有 $x\in B\subseteq S_i$, 所以 $x_\alpha\in P_{X_\alpha}S_i=Y_\alpha$, 其中无论 $Y_\alpha=X_\alpha$ 或者 $Y_\alpha=O_\alpha$ 都是 X_α 的开集. 又因为对于每一个 $M_\alpha\in\mathfrak{M}_\alpha$ 有 $x_\alpha\in\overline{M}_\alpha$, 所以 $Y_\alpha\cap M_\alpha\neq\phi$.

因而对于每一个 i 以及对于每一个 $M\in\mathfrak{M}$ 都有 $M\cap S_i\neq\phi$. 所以 $\mathfrak{M}$ 中增加 S_i 后不会破坏 $\mathfrak{M}$ 的有限交性. 但就有限交性而论 $\mathfrak{M}$ 是最大的，因此对于每一个 i 都有 $S_i\in\mathfrak{M}$. 又因为 $\mathfrak{M}$ 中的有限个元素之交仍然在 $\mathfrak{M}$ 中，因此

$$B=\bigcap_{i=1}^{k}S_i\in\mathfrak{M}.$$

设 $M\in\mathfrak{M}$, 则因为 $B\in\mathfrak{M}$, 而且 $\mathfrak{M}$ 具有有限交性，所以 $M\cap B\neq\phi$, 因此对每一个 $M\in\mathfrak{M}$ 都有 $x\in\overline{M}$, 从而 $x\in\bigcap_{M\in\mathfrak{M}}\overline{M}$. 因为 $\mathscr{F}\subseteq\mathfrak{M}$, 所以

$$\bigcap_{F\in\mathscr{F}}F\supseteq\bigcap_{M\in\mathfrak{M}}\overline{M},$$

根据 3.6, X 是紧空间. ▌

例子（和练习）

3.4　在具有寻常拓扑的实平面中，任意闭的有界集合(它的拓扑是平面寻常拓扑的相对拓扑)是紧的.

3.5　试证如果 X 是紧空间, Y 是 Hausdorff 空间, $f: X\to Y$ 是映射，则 $f(X)$ 是 Y 的闭子集.

3.6　试证在 3.12 中向 $\mathfrak{P}$ 引入的偏序的确是偏序.

3.7　设 $X=\bigtimes_{\alpha\in A}X_\alpha$ 作为积空间是紧空间，证明每一个 X_α 是紧空间. [提示：用 3.7.]

§2 分 离 公 理

现在暂不考虑紧空间而转到讨论开集分离点或闭集的问题上来. 我们以如下方式向空间引入一组分离公理.

3.14 定义　设 X 是一个拓扑空间，如果它满足如下所述的公理 $T_i(i=0, 1, 2, 3, 4)$, 则称 X 是 T_i 空间 $(i=0, 1, 2, 3, 4)$.

T_0 公理：对每一组 $x, y\in X$, $x\neq y$, 或者存在 $U\in\mathscr{U}_x$, 使得 $y\notin U$；或者存在 $V\in\mathscr{U}_y$, 使得 $x\notin V$.

T_1 公理：对每一组 $x, y\in X$, $x\neq y$, 存在 $U\in\mathscr{U}_x$ 和 $V\in\mathscr{U}_y$, 使得 $y\notin U$ 和 $x\notin V$.

T_2 公理：对每一组 $x, y\in X$, $x\neq y$, 存在 $U\in\mathscr{U}_x$ 和 $V\in\mathscr{U}_y$, 使得 $U\cap V=\phi$.

T_3 公理：对每一点 $x\in X$ 与每一个闭集 $C\subseteq X$, 如果 $x\notin C$, 则存在 $U\in\mathscr{U}_x$ 与 $O\in\mathscr{O}$ ($\mathscr{O}$ 是 X 的开集族), 使得 $C\subseteq O$ 且 $O\cap U=\phi$.

T_4 公理：对每一对不相交的闭集 $C, D\subseteq X$, 存在 $O_1, O_2\in\mathscr{O}$, 使得 $C\subseteq O_1$ 与 $D\subseteq O_2$ 且 $O_1\cap O_2=\phi$.

在给出这个定义的一些解释之前，先证明一个简单的定理.

3.15 定理　空间 X 是 T_1 空间当且仅当它的每一个点都是闭的.

证明　设 $x\in X$, 对每一点 $y\in X$, $y\neq x$, 选取 $U\in\mathscr{U}_y$, 使得 $x\notin U$, 所以 $X-\{x\}\supseteq U$. 因此, 对每一点 $y\in X-\{x\}$ 有 $X-\{x\}\in\mathscr{U}_y$, 根据 1.3 可知 $X-\{x\}$ 是开的, 从而 $\{x\}$ 是闭的.

反之, 设 $x\in X$, $y\in X$ 且 $x\neq y$, 因为 $\{x\}$ 是闭的, 所以 $X-\{x\}$ 是开的. 又因为 $y\in X-\{x\}$, 所以 $X-\{x\}\in\mathscr{U}_y$. 同理可得 $X-\{y\}\in\mathscr{U}_x$, 因此 X 是 T_1 空间. ▌

表达上面定理的语言容易受到指责，因为点实际上不可能是闭的. 应该将它说成集合 $\{x\}$ 是闭的. 但我们仍然认为“点是闭的”这种说法较好，因为这样的说法更简单而且更有表现力. 只是我们应当将这种说法解释为它指的是形如 $\{x\}$ 这样的集合是闭的.

现在让我们更严密地考察 3.14. 首先注意到, T_2 公理正好是说一个空间是 Hausdorff 空间. 因此, Hausdorff 空间类与 T_2 空间类是相同的. 其余有关 3.14 的讨论留作下面的练习.

例子（和练习）

3.8　设 X 是具有右序拓扑的偏序集，则 X 是 T_0 空间但不必是 T_1 空间.

3.9　设 X 是任意一个无限集. 定义

$$\mathscr{O}=\{O \mid O=\phi \quad \text{或} \quad O=F^c, F \text{是有限集}\},$$

根据1.6，$\mathscr{O}$ 在 X 上产生一个拓扑. 具有这样拓扑的 X 是 T_1 空间但不是 T_2 空间.

3.10　设 X 具有平庸拓扑，则 X 是 T_3 空间但不必是 T_2 空间，因为在 X 中单个点不必是闭集.

3.11　设 X 是 T_1 空间，x 是 $A \subseteq X$ 的极限点. 则对每一个 $U \in \mathscr{U}_x$，$U \cap A$ 是无限集.

3.12　设 X 是 T_1 空间，x 是 $A \subseteq X$ 的极限点，F 是 X 中的有限集，则 x 是 $A-F$ 的极限点.

3.13　设 X 是 T_1 空间，F 是 X 中的有限集，则 F 没有极限点.

如前面练习表明的那样，每一个 T_i 公理不一定比 T_{i-1} 公理更强，因为我们已经看到有这样的空间，它是 T_3 空间但不是 T_2 空间. 如果我们有一列逐个变强的公理，使得其中的任何一个能够推导出前面一个，这将是令人满意的. 为了得到这样的公理，我们给出下面的定义.

3.16 定义　(1) 一个空间如果既是 T_1 空间又是 T_3 空间，则称它为**正则空间**.

(2) 一个空间如果既是 T_1 空间又是 T_4 空间，则称它为**正规空间**.

在进一步讨论之前，对于用“正规”这个词去表示拓扑空间的性质作出一些解释是必要的. 因为在数学辞汇中也许没有什么词

比它更用得过度了．虽然如此，由于"正规"一词用于既是T_1又是T_4的空间已是源远流长，引入新的术语必导致新的混乱．让我们坚持这一习惯用语．

关于术语的又一个注释：T_i空间的概念属于 Alexandroff 与 Hopf．他们的概念与我们在这里引入的概念有些差别．这些差别是微小的，也即是我们称为正则空间的他们称为T_3空间以及我们称为正规空间的他们称为T_4空间．某些著者用 Alexandroff 与 Hopf 的说法，而有些著者又用我们这里的说法．因此，在阅读其它书籍时，读者应当注意术语"T_3空间"与"T_4空间"究竟指的是这两种含义中的哪一种．

3.17 定理 在拓扑空间的下述性质中，每一个性质都比其次一个性质更强：正规性，正则性，T_2 (Hausdorff)，T_1，T_0．也就是说，如果一个空间满足这些性质中的任何一个性质，则它也满足这个性质以后的各个性质．

证明留作练习．∎

现在给出正规空间与正则空间的另外一些特征．

3.18 定理 T_1空间X是正则空间当且仅当对每一个$x\in X$以及每一个$U\in\mathscr{U}_x$，存在$V\in\mathscr{U}_x$，使得$\overline{V}\subseteq U$．

证明 设X是正则空间，则它满足T_3公理．设$x\in X$，$U\in\mathscr{U}_x$，根据1.4，存在$O\in\mathscr{O}$，使得$x\in O\subseteq U$．显然O^c是闭的且$x\notin O^c$，因此存在O_1，$O_2\in\mathscr{O}$，使得$x\in O_1$，$O^c\subseteq O_2$且$O_1\cap O_2=\phi$．设$V=O_2^c$，则V是闭的，又因$O_1\cap O_2=\phi$，故有$x\in O_1\subseteq O_2^c=V$．因为$O_1\in\mathscr{O}$，根据1.4，$V\in\mathscr{U}_x$．最后，因为$O^c\subseteq O_2$，$V=O_2^c\subseteq O\subseteq U$，又因为$V$是闭的，因此$\overline{V}=V\subseteq U$．

反之，设X满足所给的条件，则因X是T_1空间，因此我们只需证明X是T_3空间即可．设$x\in X$，$C\subseteq X$，C是闭集且$x\notin C$．则$x\in O=C^c$，O是开集，因此$O\in\mathscr{U}_x$．选取$V\in\mathscr{U}_x$(根据1.4，可以

取 V 是开的)，使得 $x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq O$. 设 $U=\overline{V}^c$, 则 U 是开的，$U\cap V=\phi$, 且 $C=C^{cc}\subseteq\overline{V}^c=U$. 这样一来，存在开集 U, V, $x\in V$, $C\subseteq U$ 而且 $U\cap V=\phi$, 因此 X 是 T_3 空间. ▌

3.19 定理 T_1 空间 X 是正规空间当且仅当对每一个闭集 C 以及每一个包含 C 的开集 $U(C\subseteq U)$, 存在开集 V, 使得 $C\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq U$.

证明留作练习(仿照 3.18 的证明). ▌

例子(和练习)

3.14 设 J 是平面上的单位正方形，这个平面具有练习 1.74 描述的拓扑，则 J 是 Hausdorff 空间但不是正则空间. 因为对点 $x=\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 与开集 $U=(S_{\frac{1}{2}}(x)\cap\mathring{J})\cup\{x\}$, 不存在 x 的邻域 V, 使得 $\overline{V}\subseteq U$.

3.15 上面练习 3.14 给出的空间是第一可数空间但不是第二可数空间.

3.16 设 $N=\{(x, y)\,|\,x, y$ 是实数, $y\geq 0\}$. 如下定义 $\mathscr{T}$: 如果 $(x, y)\in\mathring{N}=\{(x, y)\,|\,y>0\}$, 定义

$$\mathscr{U}_{(x,y)}=\{U\,|\,U\supseteq \text{某 } S_\varepsilon(x, y),\ S_\varepsilon(x, y)\text{是关于}(x, y)\text{的 } \varepsilon\text{-球},\ y>\varepsilon>0\};$$

如果 $(x, y)\in\mathrm{Fr}(N)=\{(x, y)\,|\,y=0\}$, 定义

$$\mathscr{U}_{(x,y)}=\{U\,|\,U\supseteq[S_\varepsilon(x, \varepsilon)\cup\{(x, y)\}]\}.$$

则 $(N, \mathscr{T})$ 是正则空间但不是正规空间.

3.17 如果 $i=1, 2, 3$, 证明 T 空间的子空间是 T_i 空间.

3.18 证明定理 3.17.

3.19 证明定理 3.19.

3.20 如果 $i=1, 2, 3, 4$, 证明 T_i 空间的同胚象是 T_i 空间.

下一个定理指出了 Hausdorff 空间,正规空间,紧空间之间的联系.

3.20 定理 紧的 Hausdorff 空间 X 是正规空间(从而也是正则空间).

证明 因为一个 Hausdorff 空间(亦就是 T_2 空间)是 T_1 空间,因此我们只需证明 X 满足 T_4 公理. 下面分两步进行. 首先证明 X 满足 T_3 公理. 为此目的,设 $x\in X$, $C\subseteq X$, $x\notin C$ 且 C 是闭集. 根据 3.10, 作为 X 的子空间, C 是紧的. 对于每一个 $y\in C$, 因为 X 是 Hausdorff 空间, 存在一对邻域 O_y, O_{xy}(可以取为开集)使得 $O_y\cap O_{xy}=\phi$, $x\in O_{xy}$, $y\in O_y$. 现在 $\bigcup\limits_{y\in C}O_y\supseteq C$, 又由于 C 是紧的, 存在有限集 $\{y_i|i=1, 2, \cdots, m\}$, 使得 $C\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}O_{y_i}$. 设 O_{xy_i} 是与 O_{y_i} 对应的开集($i=1, 2, \cdots, m$), 定义

$$O=\bigcap_{i=1}^{m}O_{xy_i},\quad O'=\bigcup_{i=1}^{m}O_{y_i},$$

则 O 与 O' 都是开集, $C\subseteq O'$, $x\in O$. 又 $O\cap O'=\phi$, 因为, 如果

$$z\in O'-\bigcup_{i=1}^{m}O_{y_i},$$

则 $z\in O_{y_i}$(对某一个 i), 因为 $O_{y_i}\cap O_{xy_i}=\phi$, 故

$$z\notin O_{xy_i}\supseteq O,$$

因此 $z\notin O$, 所以 $O\cap O'=\phi$. 从而 X 满足 T_3 公理.

现在证明 X 满足 T_4 公理. 设 C, $D\subseteq X$, C, D 是不相交的闭集. 因为 X 是 T_3 空间, 故对每一个 $x\in C$, 存在开集 U_x, U'_x, 使得 $x\in U_x$, $D\subseteq U'_x$ 且 $U_x\cap U'_x=\phi$. 因为 C 是紧的 Hausdorff 空间的闭子集, 因此 C 是紧的, 又因为 $C=\bigcup\limits_{x\in C}U_x$, 因而存在有限集 $\{x_i|i=1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $C\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{x_i}$. 设

$$U=\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_i},\quad V=\bigcap_{i=1}^{n}U'_{x_i},$$

这里的U'_{x_i}是与U_{x_i}相应的开集．与第一部分的证明相同，可以得出U与V是不相交的开集且$C\subseteq U$，$D\subseteq V$，因此X满足T_4公理．▌

下面的定理有这样一个特点，它将空间条件与映射条件结合起来保证了一个同胚的存在．这个定理有时也有用处．

3.21 定理 设X是紧空间，Y是Hausdorff空间，$f:X\to Y$是一一满映射，则f是同胚．

证明 根据练习2.5，我们只需证明f是闭映射．设$C\subseteq X$，C是闭集，根据3.10，C是紧的．又根据3.7，$f(C)$是紧的．再根据3.9，由于Y是Hausdorff空间，因此$f(C)$是闭的，所以f是闭映射．▌

我们已经注意到(参看练习3.17)，如果$i=1$，2或3，则T_i空间的每一个子空间也是T_i空间．因此正则空间的子空间也是正则空间．不幸的是这一点对正规空间不成立，也就是说确实有这样的正规空间，它的子空间不是正规的．证明这一点将是下一个例子的目的．这个例子既长又较复杂，因此我们较详细地作出它，而只将少数几处留给读者去证明．在这个例子中，考察的对象"长度"比"宽度"大，因此通常称为Tychonoff板．

例子(和练习)

3.21 (Tychonoff板) 设S是任意一个不可数集，"$\prec$"是S上的良序，也就是说，如果$T\subseteq S$，$T\neq\phi$，则存在$t\in T$，对所有$s\in T$有$t\prec s$或$t=s$．虽然我们在这里没有给予证明，但这样的良序的存在可以由选择公理保证．设Z^+是具有寻常序的正整数集，又设$Y=S\times Z^+$，并在Y上建立字典式序"$<$"[也就是说$(s,n)<(t,m)$当且仅当或者$s\prec t$或者$s=t$和$n<'m$，这里"$<'$"表示整数通常的大小顺序关系]．我们

注意到 Y 被"$<$"良序化．设 $\Omega\in Y$ 是在字典式序下 Y 中有下述性质的第一个元素：Ω 前面有 Y 中不可数个元素．设 s_2 是 S 的第二个元素，又设 $\omega=(s_2, 1)$，这里 ω 是 Y 中具有下述性质的第一个元素：ω 前面有 Y 中无限多个元素．最后，设

$$X_0=\{y\,|\,y\in Y,\ y\leqq\Omega\},\quad X_1=\{y\,|\,y\in Y,\ y\leqq\omega\},$$

并赋予 X_0 与 X_1 以区间拓扑，也就是说如果 $x\in X_i(i=0, 1)$，设

$$I_{z_1z_2}=\{y\,|\,z_1<y<z_2\}$$

又设

$$\mathscr{U}_x=\{U\,|\,U\supseteq I_{z_1z_2},\ \text{这里}\ z_1<x<z_2\}$$

且当 x 是 X_i 的第一个点或是 X_i 的最后一个点时需加适当修改．例如 x 是 X_i 的最后一个点，则 x 的邻域是包含 $\{y\,|\,z_1<y\leqq x\}$ 类型区间的集合．

现在我们可以证明 X_0 和 X_1 都是紧的 Hausdorff 空间．但在这里只证明 X_0 是紧空间，而将 X_0 与 X_1 是 Hausdorff 空间，X_1 是 X_0 的闭子空间的证明留给读者．设 $\{O_\alpha\}$ 是 X_0 的开覆盖，则存在 $O_0\in\{O_\alpha\}$，使得 $\Omega\in O_0$ 和存在 $x_0\in O_0$，使得区间 $I_{x_0\Omega}\subseteq O_0$．如果存在 $\{O_\alpha\}$ 的有限子族，使得 I_{x_1x} 包含在这个有限子族的并中，则称"x 是一个可达点"，这里 x_1 是 X_0 的第一个元素．又设

$$A=\{x\,|\,x_1\leqq x\leqq x_0,\ x\ \text{不是可达点}\}.$$

设 $A\neq\phi$，则因 X_0 是良序集，因而 A 有第一个元素 a，且可适当选取 O_a，使得 $a\in O_a\in\{O_\alpha\}$．又，存在 $I_{bc}\subseteq O_a$，此处 $b<a<c$，又因 a 是 A 的最小元素，$b\notin A$，所以 b 是可达的．由此存在 $\{O_\alpha\}$ 的有限子族，使得 I_{x_1b} 包含在这个有限子族的并中，因此这个有限子族加上 O_a 以后，I_{x_1a} 也要包含在这

个新的有限子族的并中，这说明 a 是可达的，因此 $a\notin A$. 这个矛盾说明 $A=\phi$. 因此对每个 x, 只要 $x_1\leqq x\leqq x_0$, 则 x 就是可达的，特别是 x_0 也是可达的. 因此，包含 $I_{x_1x_0}$ 在其并中的有限子族连同 O_0 一起就能覆盖 X_0, 故 X_0 是紧的.

我们现在考虑空间 $Z=X_0\times X_1$. 因为 X_0 和 X_1 是紧的，根据 3.13 可知 Z 也是紧的，又因为每一个因子空间都是 Hausdorff 空间，因此 Z 也是 Hausdorff 空间. 由此根据 3.20, Z 是正规的. 空间 Z 称为 Tychonoff 板. 考虑子空间 $Z'=Z-\{(\Omega, \omega)\}$, 则 Z' 不是正规空间. 因为，如果 $Z_1=\{z|z\in Z, z=(x, \omega), x$ 是任意的$\}$(也就是说，板的顶边) 和 $Z_2=\{z|z\in Z, z=(\Omega, x), x$ 是任意的$\}$ (也就是说，板的右边)，则 Z_1 和 Z_2 是 Z 的闭子集，因为它们是点在诸射影映射下的逆象. 由此，$Z_1'=Z_1\cap Z'$ 和 $Z_2'=Z_2\cap Z'$ 是 Z' 的闭子集，且因为 $Z_1\cap Z_2=(\Omega, \omega)\notin Z'$, 因此它们是不相交的. 现在设 O_1' 与 O_2' 是 Z' 的任意开集且 $O_1'\sqsupseteq Z_1'$ 和 $O_2'\sqsupseteq Z_2'$. 考虑覆盖了板右端的 O_2', 它是基元的并，也就是说它是形如矩形 $I_{x_a\Omega}\times I_{x_1x_2}$ 这样的集合的并(这里 $x_a<\Omega$, $x_1<x_2$). 由于区间 $I_{x_a\Omega}$ 的起点 x_a 的集合是可数的，根据下面的练习 3.22, 它有一个上界 $x<\Omega$. 考虑点 $(x, \omega)\in Z_1'$, 则 $(x, \omega)\in O_1'$ 且存在矩形

$$R=I_{x_3x_4}\times I_{x_5\omega},$$

这里 $x_3<x<x_4$, $x_5<\omega$, 使得 $(x, \omega)\in R\sqsubseteq O_1'$. 这说明 (参看下面练习 3.23)

$$R\cap O_2'\neq\phi, \text{ 因此 } O_1'\cap O_2'\neq\phi.$$

由此得出 Z' 不是正规的.

3.22 证明 x_a 的任意可数集合有最小上界 $x<\Omega$, 其中对每个 α, $x_\alpha<\Omega$, $x_\alpha\in X_0$.

3.23　证明上面练习 3.21 中的 $R\cap O_2'\neq\phi$.

3.24　在上面练习 3.21 关于 X_0 紧性的证明中，为何仅须考虑点 $a\in A$ 使得 $x_1<a<\Omega$？

注　前面对 Tychonoff 板的描述原可以简化许多．我们现在这样作的原因在于想避开引入序数的概念．对于熟悉序数的学生来说，空间 X_0 显然是不超过第一不可数序数 Ω 的所有序数的集合，而 X_1 显然是不超过第一无限序数 ω 的所有序数的集合．

Tychonoff 板促进了一类空间的定义，这类空间的每一个子空间都是正规的．

3.22 定义　一个空间称为完全正规的当且仅当它的每一个子空间是正规的．

我们现在希望将完全正规空间与某些其它性质联系起来，但这首先需要一个结果，这个结果通常称为 Lindelöf 定理．

3.23 定理　设 X 是具有可数基的空间，又设

$$\{O_\alpha \mid \alpha\in A\}$$

是 $Y\subseteq X$ 的开覆盖，则存在可数子覆盖 $\{O_i'\}\subseteq\{O_\alpha\}$．

证明　对 $x\in Y$ 及某 O_α 满足 $x\in O_\alpha$ 则可对应 $B_{\alpha,x}\in\mathscr{B}$ 使 $x\in B_{\alpha,x}\subseteq O_\alpha$. 定义 $\{B_\alpha\}=\{B_{\alpha,x}\in\mathscr{B}\mid x\in Y,\ \alpha\in A$ 且 $x\in B_{\alpha,x}\subseteq O_\alpha\}$. 因为 $\mathscr{B}$ 是可数的且 $\{B_\alpha\}\subseteq\mathscr{B}$，因而 $\{B_\alpha\}$ 也是可数的，也就是说 $\{B_\alpha\}=\{B_i\mid i=1,\ 2,\ \cdots\}$，这是将 B_α 重新标记以正整数指标后得出的． 使每一个 B_i 对应一个 O_i' 合于 $B_i\subseteq O_i'\in\{O_\alpha\}$，则 $\{O_i'\mid i=1,\ 2,\ \cdots\}$ 就是所希望的可数覆盖． 因为 $\{O_i'\}$ 显然是可数的，且 $\{O_i'\}\subseteq\{O_\alpha\}$． 如果 $x\in Y$，则有某个 α，使 $x\in O_\alpha$，因此有某个 i，使得 $x\in B_{\alpha,x}=B_\alpha=B_i$． 故 $x\in B_i\subseteq O_i'$，从而 $\bigcup_{i=1}^{\infty}O_i'\supseteq Y$． ∎

证明了 Lindelöf 定理，我们现在可以得出下一个定理．

3.24 定理 每一个具有可数基的正则空间都是完全正规空间．

证明 根据练习 1.72 和练习 3.17 可以看出，具有可数基的正则空间的任意子空间也是具有可数基的正则空间．因此我们只需证明具有可数基的正则空间是正规空间即可．

为此目的，设 C 和 D 是 X 中不相交的闭子集．对每一点 $x\in C$，存在开集 U_x，使得 $x\in U_x\subseteq\overline{U}_x\subseteq D^c$，也就是说 $\overline{U}_x\cap D=\phi$．因为 $\bigcup_{x\in C}U_x\supseteq C$，根据 3.23，我们可以选取可数子集 $\{U_i\mid i=1, 2, \cdots\}\subseteq\{U_x\mid x\in C\}$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\supseteq C.$$

与此类似地，可以选取 $\{V_i\mid i=1, 2, \cdots\}$ 使得

$$\overline{V}_i\cap C=\phi,\quad \bigcup_{i=1}^{\infty}V_i\supseteq D.$$

现在定义 $O_1=U_1$，$W_1=V_1$ 且此后归纳地定义

$$O_n=U_n\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{V}_i^c\right)\quad 和\quad W_n=V_n\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{U}_i^c\right).$$

显然 O_n 与 W_n 是开的，因此

$$O=\bigcup_{n=1}^{\infty}O_n\quad 与\quad W=\bigcup_{n=1}^{\infty}W_n$$

是开的．又因为对每一个 i，$C\subseteq\overline{V}_i^c$ 而且 $C\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$，因此 $C\subseteq O$．同样可以得出 $D\subseteq W$．我们又注意到如果 $n\geq m$，则

$$O_n\cap W_m=U_n\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{V}_i^c\right)\cap V_m\cap\left(\bigcap_{i=1}^{m}\overline{U}_i^c\right)\subseteq\overline{V}_m^c\cap V_m=\phi,$$

如果 $n\leq m$，则

$$O_n\cap W_m\subseteq U_n\cap\overline{U}_n^c=\phi,$$

由此对每一个 m，有 $O_n\cap W_m=\phi$，因此 $O_n\cap W=\phi$．由于后面这个

等式对每一个 n 成立，因此我们有 $O\cap W=\phi$. 于是，我们已经作出了所需的包含 D 和 C 的不相交开集，因此 X 是正规的. ∎

例子(和练习)

3.25 试证每一个完全正规空间是正规的.

3.26 试证每一个具有可数基的正则空间是正规的.

3.27 试证完全正规空间的每一个子空间也是完全正规的.

§3 列紧性(Countably Compact)*

我们过去曾经看到实直线上的 Heine-Borel 定理启发我们给出了紧性概念. Bolzano-Weierstrass 性质是实直线的另一个性质，它的一种说法是实直线的任意有界无限闭集有属于这个集合本身的极限点. 这个性质导出了下面列紧性的定义.

3.25 定义 设 X 是一个拓扑空间，如果 X 的每一个无限子集在 X 中有极限点，则称 X 是**列紧的**.

立刻可以看出列紧性不比紧性更强. 下一个定理就指出了这一点.

3.26 定理 设 X 是紧空间，则 X 是列紧空间.

证明 设 $A\subseteq X$ 是无限集. 如果 A 在 X 中没有极限点，由 A 中选出不相同的点组成无限序列 $\{x_n\}$，则 $\{x_n\}$ 在 X 中也没有极限点. 因此对每一个 n，存在开集 $V_n\in\mathscr{U}_{x_n}$，使得

---

* 校注：本节英文标题是 Countably Compact，这词在一般拓扑学文献中几乎都是指空间的任一可数开覆盖必有有限子覆盖这一性质，中译为"可数紧性"；但本书却用此词描述空间的无限子集必有极限点这一性质(3.25)，后者相应的中文名词是"列紧性". 这两者是不同的，其关系可见本节习题 3.29, 3.30 及定理 3.27. 为了不造成名词的不必要混乱，尊重中外文献中名词的习惯用法，本书作者用的 Countably Compact 一词都按其内涵译成"列紧"，并且本节内作者关于此英文名词独特用法的几段话，因似嫌附会，亦予删削.

$$V_n \cap \{x_n\} = x_n.$$

又注意到对每一个 $y \notin \{x_n\}$，因为 y 不是 $\{x_n\}$ 的极限点，所以存在开集 $V_y \in \mathscr{U}_y$，使得 $V_y \cap \{x_n\} = \phi$. 设

$$V_0 = \bigcup_{y \notin \{x_n\}} V_y,$$

则 V_0 是开集. 现在

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i = X,$$

但这个开覆盖显然没有有限子族能覆盖 X，因为如果除去了任何一个 $V_i(i \geq 1)$，也就除去了 x_i. 这说明 X 不是紧的，这个矛盾证明 X 是列紧空间. ▌

事实上，列紧性比紧性弱，也就是说存在非紧的列紧空间. 下面的例子就指出了这一点.

例子(和练习)

3.28 设 X 是正整数集，$B_i = \{2i, 2i-1\}$，又设 $\mathscr{B} = \{B_i | i = 1, 2, \cdots\}$ 是 X 的拓扑的基，则 X 是列紧空间但不是紧空间.

3.29 如果 X 是这样一个空间：X 的每一个可数开覆盖包含 X 的有限子覆盖，则 X 是列紧空间.

3.30 证明上面练习 3.28 中的空间 X 虽然是列紧空间，但并不具有每一个可数开覆盖都有有限子覆盖这样的性质.

3.31 证明列紧空间的任意闭子空间也是列紧的.

前面的练习指出了一个使人遗憾的情况（在练习 3.29, 3.30 中），也就是说，虽然具有每一个可数开覆盖都有有限子覆盖这样性质的空间是列紧空间，但是相反的论述并不成立. 对 X 附加一个条件后（假设 X 是 T_1 空间）能使这两条性质等价. 下面的定理就指出了这一点.

3.27 定理 设 X 是 T_1 空间，则 X 是列紧空间当且仅当 X 的每一个可数开覆盖包含有限子覆盖.

证明 上面的练习 3.29 证明了这个定理的充分性部分. 因此我们只需证明由列紧性能导出所给的条件. 为此目的，设 $\{O_n\}$ 是覆盖 X 的可数开集族，如果没有有限子族能覆盖 X，则对任何 n，$C_n = X - \bigcup_{i=1}^{n} O_i$，都有 $C_n \neq \phi$. 作为开集的余集，C_n 是闭的而且 $C_n \supseteq C_{n+1}$. 因此对每一个 n，我们都能选取点 $x_n \in C_n$. 如果集合 $S = \{x_n | n=1, 2, \cdots\}$ 是无限集，因为 X 是列紧的，因此 S 在 X 中有极限点 x_0. 根据练习 3.12，x_0 是集合

$$S_k = \{x_n | n=k, k+1, \cdots\} \subseteq C_k$$

的极限点. 因为 C_k 是闭的，对每一个 k 都有 $x_0 \in C_k$，因此对任何 k 都有 $x_0 \notin O_k$，这与 $\{O_n\}$ 覆盖 X 矛盾. 这说明集合 $S = \{x_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 是有限集. 因此存在 x' 及 $N > 0$，使得对所有的 $n \geq N$ 都有 $x_n = x'$. 如前所述，对 $n > N$ 有 $x' \in C_n$，又因为 C_n 是集合的递减序列（也就是说 $C_n \supseteq C_{n+1}$），因此对所有的 n 都有 $x' \in C_n$. 这表示对所有 n，$x' \notin O_n$，因此 $\{O_n\}$ 不是覆盖. 由此矛盾得出了这个定理. ∎

我们现在证明，在适当的条件下，列紧性导出紧性.

3.28 定理 第二可数的 T_1 空间是列紧空间当且仅当它是紧空间.

证明 根据 3.26，由紧性可以得出列紧性. 相反，如果 X 是列紧空间，$\{O_\alpha\}$ 是 X 的开覆盖，则根据 3.23，存在 $\{O_\alpha\}$ 的可数子族 $\{O_i\}$ 也能覆盖 X. 由 3.27，$\{O_i\}$ 包含有限子覆盖，因此 X 是紧空间. ∎

例子(和练习)

3.32 证明 T_1 空间是列紧空间当且仅当每一个具有有限交性的

可数闭集族的交不空.

3.33　一个 T_1 空间是列紧空间当且仅当每一个无限开覆盖(这里无限是指指标集)有真的子覆盖. [提示：仿照 3.27.]

§4　局部紧性

3.29 定义　如果对每一点 $x\in X$, 存在 $U\in \mathscr{U}_x$, 使得 U 是紧的, 则称空间 X 为局部紧的.

例子(和练习)

3.34　具有寻常拓扑的实直线是局部紧的但不是紧空间.

3.35　具有寻常拓扑的实平面是局部紧的但不是紧空间.

3.36　每一个紧空间是局部紧空间.

3.37　局部紧空间的每一个闭子空间也是局部紧的.

引入局部紧性概念有两方面的原因. 首先, 象已经指出的那样(参看练习 3.34, 3.35), 实直线与实平面都是局部紧的. 事实上

$$E^n=\bigtimes_{i=1}^{n} R_i$$

同样是局部紧的, 这里的每个 R_i 正好是具有寻常拓扑的实直线. 因为分析学家对这些空间有着普遍的兴趣, 局部紧性概念与分析有某些关系. 其次, 球极平面射影的构造过程有一个非常漂亮的拓扑类比. 这些可能已被忘掉, 让我们回忆球极平面射影的构成如次:

考虑具有 x 与 y 坐标轴的实平面. 作一个半径为 $\frac{1}{2}$, 与平面在点(0, 0)相切的球面. 如下放置具有坐标轴的实三维空间: 它的坐标原点在实平面的坐标原点; 它的 x' 轴与 y' 轴分别与实平面的 x, y 轴重合; 正向的 z' 轴通过球面的北极; 球面的南极在点(0, 0). 现在对实平面上的每一个点 $P=(x, y)$, 我们能在球面 S

(球面方程是 $x'^2+y'^2+z'^2=z'$) 上以如下的办法作出它的对应点：由北极 $N=(0, 0, 1)$ 向 $P=(x, y, 0)$ 作直线. 这条直线与球面在某点相交，设交点是 Q. 一个简单的计算表明

$$x'=\frac{x}{1+r^2}, \quad y'=\frac{y}{1+r^2}, \quad z'=\frac{r^2}{1+r^2},$$

其中 $r^2=x^2+y^2$.

容易看出，将实平面映成除去北极点后的球面的映射 $f: R\to S-\{(0, 0, 1)\}$ 是一一满映射，其中

$$f((x, y))=\left(\frac{x}{1+r^2}, \frac{y}{1+r^2}, \frac{r^2}{1+r^2}\right)$$

且 $r^2=x^2+y^2$. 另外的计算表明

$$f^{-1}((x', y', z'))=\left(\frac{x'}{1-z'}, \frac{y'}{1-z'}\right).$$

从这里可以进一步看出 f 与 f^{-1} 都是连续的，因此 f 是同胚.

现在出现了这样的情况，我们已经将局部紧的实平面以同胚方式嵌入紧的球面 S，使得 $S-f(R)$ 只是一个点 $N=(0, 0, 1)$. 因此，在某种意义下，提出这样的问题是自然的：如果 X 是非紧的局部紧空间，是否可能找到紧空间 X' 及同胚 $f: X\to X'$，使得 $X'-f(X)$ 只是一个点？对这个问题的回答是"能". 我们将在下几个定理中证明这个结论. 这一切说明球极平面射影只是更一般情况的一个特例.

上面结果的用处在于我们能将局部紧空间视为紧空间 X' 的子空间，而一般说来紧空间比非紧空间便于研究.

3.30 定义 设 X 是非紧 T_1 空间，$\mathscr{K}$ 是 X 中闭的紧子集所成的集族，又设 ι 是一个理想元素且 $\iota\notin X$. 定义空间 ${}^cX=X\cup\{\iota\}$ 是以

$$\mathscr{B}=\{U \mid U\in\mathscr{O} \quad \text{或} \quad U={}^cX-K,\ K\in\mathscr{K}\}$$

为基的空间，则称 ${}^cX$ 为 X 的单点紧化.

强调 X 是 T_1 空间的原因在于希望 $\mathscr{K}\neq\phi$. 因为如果 $\mathscr{K}=\phi$, ι 将没有邻域系. 单点紧化 ${}^cX$ 最重要的性质由下列定理给出.

3.31 定理 设 X 是非紧 T_1 空间，则 ${}^cX$ 是 T_1 空间.

证明 显然 $\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B={}^cX$. 设 $x\in{}^cX$ 及 $U, V\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in V$, $x\in U$. 如果 $x\in X$, U, V 是开的，则存在 X 中的开集 $U\cap V=W$ (当然 W 也在 $\mathscr{B}$ 中)，使得

$$x\in W\subseteq U\cap V.$$

如果 $x=\iota$, 则

$$U={}^cX-K_1,\quad V={}^cX-K_2,\quad K_1,\ K_2\in\mathscr{K}.$$

设 $W=U\cap V=({}^cX-K_1)\cap({}^cX-K_2)={}^cX-(K_1\cup K_2)$, 又 $K_1\cup K_2$ 也是闭的和紧的，因此 $W\in\mathscr{B}$, 所以 $x\in W\subseteq U\cap V$. 根据 1.29, ${}^cX$ 是拓扑空间.

我们现在证明 ${}^cX$ 是 T_1 空间. 设 x, $y\in{}^cX$, $x\neq y$. 如果 x, $y\in X$, 则因 X 是 T_1 空间，因此存在 $U\in\mathscr{U}_x$(或 $\mathscr{U}_y$)，使得 $y\notin U$ (或 $x\notin U$). 另一种情况，如果 x 与 y 中的一个(设为 x)是 ι, 则因 $\{y\}$ 是 X 中闭的紧集，故 $U={}^cX-\{y\}\in\mathscr{U}_x$ 且 $y\notin U$. 因此在任何情况下 ${}^cX$ 都是 T_1 空间. ▌

3.32 定理 设 X 是非紧的 T_1 空间，则 ${}^cX$ 是紧空间.

证明 设 $\{O_\alpha\}$ 是 ${}^cX$ 的开覆盖，则在 $\{O_\alpha\}$ 中有某个集合包含 ι, 我们设它为 O_0. 显然存在基元 $B\subseteq O_0$ 且 $B={}^cX-K$, K 是 X 中闭的紧集. 今有

$$K\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Delta}O_\alpha,$$

所以存在有限子集族 $\{O_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{n}O_i\supseteq K.$$

因为 ${}^cX-K\subseteq O_0$, 我们有

$$^{c}X\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}O_i.$$

这样我们已经找到了覆盖 $\{O_\alpha\}$ 的有限子覆盖，因此 ^{c}X 是紧的. ▌

3.33 定理 设 X 是非紧 T_1 空间，^{c}X 是它的单点紧化，则 X 是局部紧的 Hausdorff 空间当且仅当 ^{c}X 是 Hausdorff 空间.

证明 设 ^{c}X 是 Hausdorff 空间，则 X 作为 ^{c}X 的子空间(参看下面的练习 3.39) 也是 Hausdorff 空间. 设 $x\in X$, 则存在 ^{c}X 的开集 U 和 V, 使得 $x\in U$, $\iota\in V$, $U\cap V=\phi$ 且对某个 $K\in\mathscr{K}$ 有 $V\supseteq{}^{c}X-K$; 现在

$$({}^{c}X-K)\cap U\subseteq V\cap U=\phi,$$

因此 $U\subseteq K$. 因为 K 是闭的紧集，因此 $\overline{U}\subseteq K$, 且 $\overline{U}$ 是紧的. 显然 $\overline{U}\in\mathscr{U}_x$, 因此 X 是局部紧的.

相反，设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间. 又设 $x, y\in{}^{c}X$ 且 $x\neq y$. 如果 $x, y\in X$, 则存在 X 中的开集 U, V, 因此也是 ^{c}X 中的开集，使得 $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\phi$. 如果 x 与 y 二者中的一个是 ι, 不妨设 $x=\iota$, 则因 X 是局部紧的，我们可以选取 $U\in\mathscr{U}_y$, 使得 U 是紧的，从而 U 也是闭的. 则

$$^{c}X-U\in\mathscr{U}_\iota \quad 且 \quad ({}^{c}X-U)\cap U=\phi.$$

因此在任何情况下 ^{c}X 都是 Hausdorff 空间. ▌

例子(和练习)

3.38 (a) 如果映射 $f: X\to{}^{c}X$ 由 $f(x)=x$ 定义，证明 f 是 X 与 $f(X)$ 之间的同胚.

(b) 由上面的 (a) 推出每一个局部紧的 Hausdorff 空间与一个紧的 Hausdorff 空间的一个子空间同胚.

3.39 由 3.30 显然看出 X 是 ^{c}X 的子集. 再证明它也是子空间.

3.40 证明每一个局部紧的 Hausdorff 空间是正则空间. (提示:

使用 3.33, 3.20, 练习 3.17 和上面的练习 3.39.)

3.41 设 $X=\{n \mid n>0,\ n$ 是整数$\}$, 定义

$$S_{n,\varepsilon}=\{m \mid |1/n-1/m|<\varepsilon\}$$

并设 $\mathscr{B}=\{S_{n,\varepsilon} \mid n=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon>0\}$. 证明: 如果以 $\mathscr{B}$ 为基, 则 X 是一个拓扑空间; X 是 Hausdorff 空间; 向 X 增加点 $\iota=\infty$ 且通过 $S_{\infty,\varepsilon}=\{m \mid |1/m|<\varepsilon\}$ 来定义 ∞ 的基元即可得到 ${}^{c}X$.

3.42 (学期论文) 仿紧性.

定义 拓扑空间 X 的子集族 $\{F_\alpha\}$ 称为**局部有限的**, 如果对每一个 $x\in X$, 存在 $U\in\mathscr{U}_x$, 使得 $U\cap F_\alpha\neq\phi$ 仅对有限个指标 α 成立.

定义 设 $\{U_\alpha\}$, $\{V_\beta\}$ 是拓扑空间的覆盖, 如果对每个 β, 存在 α, 使得 $V_\beta\subseteq U_\alpha$, 则称覆盖 $\{V_\beta\}$ 为 $\{U_\alpha\}$ 的**加细**.

定义 拓扑空间称为是**仿紧的**, 如果它是 Hausdorff 空间且每一个开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 有局部有限的加细.

至少证明下列各点:

(1) 每一个紧的 Hausdorff 空间是仿紧的, 但其逆不真.

(2) 仿紧性是拓扑性质.

(3) 每一个仿紧空间是正则空间.

(4) 每一个仿紧空间是正规空间.

(5) 仿紧空间的每一个闭子空间是仿紧的.

(6) 仿紧空间与紧空间的拓扑积是仿紧的.

(7) 用反例说明仿紧空间的拓扑积不必是仿紧的.

注 由 A. H. Stone 得出的一个结果告诉我们, 每一个度量空间(参看第五章) 是仿紧的. 这个结果发表在 Bull. Amer. Math. Soc. (1948), pp. 977～982.

第四章　又一些特殊类型的拓扑空间（主要的几种连通性）

§1　引　　言

在这一章内我们继续探讨能够对空间的拓扑施加的各种限制．所讨论的主要概念是连通性．直观地说，连通空间是由一个整块组成的空间，问题是要写出直观概念"一个整块"的正式定义．首先，让我们考虑几个例子．自然，我们可以认为实直线 R 与实平面 E 都是一个整块．如果我们考虑 $R-\{0\}$，则它的确不是一个整块，因为在不破坏拓扑（亦是几何）结构的条件下，我们能将 $R-\{0\}$ 分成两块

$$R'=\{x \mid x\in R,\ x>0\} \quad 和 \quad R''=\{x \mid x\in R,\ x<0\}.$$

让我们进一步考虑另一个例子，也就是

$$X=\left\{(x,\ y) \mid x,\ y\in R,\ 在\ 0<x\leqq\frac{1}{\pi}\ 时\ y=\sin\frac{1}{x},\right.$$

$$\left.在\ x=0\ 时\ -1\leqq y\leqq 1\right\}.$$

由
$$y=\sin\frac{1}{x} \quad 当 \quad 0<x\leqq\frac{1}{\pi}\ 时$$

定义的无限弧 A 是一块，而线段

$$L=\{(0,\ y) \mid -1\leqq y\leqq 1\}$$

也是一块．将 X 分成 A 和 L 这样两块破坏了 X 的拓扑结构吗？事情的确是这样，因为 L 的每一个点都是 A 的一些点的极限点．例如点 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ 是集合

$$A_{1/2}=\left\{(x,\ y)\,|\,x=\frac{1}{\pi/6+2n\pi},\ y=\sin\frac{1}{x},\right.$$

$$\left.n=1,\ 2,\ \cdots\right\}\subseteq A$$

的极限点．事情似乎是显然的，我们不希望一个连通空间能表为这样两个集合的并，两个集合中的任何一个都没有另一个的极限点．由于这个想法，我们作出下面两个定义．

4.1 定义 设 X 是拓扑空间，A 和 B 是 X 的非空子集．如果 $A\cap\overline{B}=\phi$ 与 $\overline{A}\cap B=\phi$，则称 A 与 B 是分离的．

4.2 定义 设 X 是拓扑空间，如果 X 不能表示为两个非空分离集之并，则称 X 是连通的．如果 A 是 X 的连通子空间，则集合 $A\subseteq X$ 称为是连通的．

§2 连 通 空 间

有许多别的方法定义连通空间．下面给出其中的几个．

4.3 定理 空间 X 是连通空间当且仅当下列各条件中的任意一个成立：

(1) X 不能表为两个非空不相交的开集之并．

(2) X 不能表为两个非空不相交的闭集之并．

(3) 在 X 中只有集合 ϕ 与 X 是既开又闭的．

(4) 对每一个连续函数 $f\colon X\to R$，$f(X)$ 不由两个不相同的实数构成．

证明 将(1)，(2)和(3)的证明留作练习．我们用反证法给出(4)的证明．设 f 是由 X 到 R 的连续函数，并使得 $f(X)=\{a\}\cup\{b\}$，$a\neq b$．设 $\varepsilon=\frac{1}{3}|a-b|$ 并定义

$$U=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon),\ V=(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon),$$

则 $U\cap V=\phi$ 且 U 和 V 是 R 中的开集．因为 f 是连续的，因此

$f^{-1}(U)$ 和 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集并且

$$X=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V),$$

根据(1)的结论, X 是不连通的.

反之, 设 X 不是连通空间, 根据(1)的结论存在开集 U, V, 使得 $X=U\cup V$ 且 $U\cap V=\phi$. 如下定义 $f:X\to R$: 如果 $x\in U$ 则 $f(x)=0$, 如果 $x\in V$, 令 $f(x)=1$, 则 f 显然是连续的. ▌

连通性是拓扑性质. 事实上, 甚至更强的结论也成立, 即有

4.4 定理 设 X 是连通空间, $f:X\to Y$ 是连续满函数, 则 Y 是连通的.

证明 我们用反证法, 证明如果 Y 不连通, 则 X 也不连通. 设 Y 不连通, 根据 4.3(1), 我们能够得出 $Y=A\cup B$, 其中 $A\cap B=\phi$, A 和 B 是 Y 中的非空开集. 则

$$X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B).$$

因为 f 是连续的, 因此 $f^{-1}(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 是 X 中的开集, 且 $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)=\phi$. 所以 X 不是连通的. ▌

例子(和练习)

4.1 设 $C\subseteq R$ 是实数集且 C 是连通的. 又设 $a,b\in C$ 且 $a<c<b$, 则 $c\in C$. [提示 假设 $c\notin C$, 定义 $f:C\to R$ 为 $x<c$ 时 $f(x)=a$, $x>c$ 时 $f(x)=b$, 然后证明 f 连续, 再用 4.3(4).]

4.2 R 的非空连通子集具有下列形式:

(a) 区间或点, 即是 (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, 其中 $a<b$, 或 $[a, b]$, 其中 $a\leq b$.

(b) 半直线, 即 (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$, 或 $(-\infty, a]$.

(c) R 本身.

4.3 设 X 是拓扑空间, 则 X 是连通空间当且仅当对每一个连续函数 $f:X\to R$, f 具有介值性质, 也就是说, 如果

$f(x_1)=a$, $f(x_2)=b$ 且 c 在 a 与 b 之间，则存在 $x\in X$，使得 $f(x)=c$。

4.4　证明定理 4.3(1)，(2)，(3)。

4.5 定理　设 X 是拓扑空间，$X=X_1\cup X_2$ 且 X_1 与 X_2 是分离的。又设 $C\subseteq X$ 是连通的，则或者 $C\subseteq X_1$，或者 $C\subseteq X_2$。

证明　定义 $C_1=C\cap X_1$，$C_2=C\cap X_2$，则 $C=C_1\cup C_2$。而且 $\bar{C}_1\subseteq\bar{X}_1$ 与 $\bar{C}_2\subseteq\bar{X}_2$，因此

$$C_1\cap\bar{C}_2\subseteq X_1\cap\bar{X}_2=\phi \quad 和 \quad \bar{C}_1\cap C_2\subseteq\bar{X}_1\cap X_2=\phi.$$

由此，如果 $C_1\neq\phi$ 和 $C_2\neq\phi$ 两者都成立，便有 C 不连通。因此或者 $C_1=\phi$ 或者 $C_2=\phi$，前者说明 $C\subseteq X_2$，后者说明 $C\subseteq X_1$。▌

4.6 定义　设 $\mathscr{D}=\{D_\alpha\}$ 是某个集合 X 的子集所成的集族。有限子集

$$\mathscr{D}_n=\{D_i\,|\,i=1,\ 2,\cdots,\ n\}\subseteq\mathscr{D}$$

称为链，如果对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，$D_i\cap D_{i+1}\neq\phi$。一个链称为是简单的，如果除 $j=i\pm1$ 外 $D_i\cap D_j=\phi$。称 X 的子集族 $\mathscr{A}=\{A_\beta\}$ 被 $\mathscr{D}$ 连锁，如果对任意 A_β，$A_\gamma\in\mathscr{A}$，存在链 $\mathscr{D}_n\subseteq\mathscr{D}$，使得 $A_\beta\cap D_1\neq\phi$，$A_\gamma\cap D_n\neq\phi$。如果对任意 A_β，$A_\gamma\in\mathscr{A}$，存在单链 $\mathscr{D}_n\subseteq\mathscr{D}$，使得 $A_\beta\cap D_1\neq\phi$，$A_\gamma\cap D_n\neq\phi$，则称 $\mathscr{A}$ 被 $\mathscr{D}$ 单连锁。

4.7 定理　设 X 是连通拓扑空间，$\{O_\alpha\}$ 是 X 的开覆盖，则 $\{O_\alpha\}$ 被 $\{O_\alpha\}$ 连锁。

证明　用反证法，若 $\{O_\alpha\}$ 是 X 的开覆盖且不能被 $\{O_\alpha\}$ 连锁。设 $O_1\in\{O_\alpha\}$，又设

$$\mathscr{O}_1=\{O\,|\,O\in\{O_\alpha\}\ 且\ \{O,\ O_1\}\ 被\ \{O_\alpha\}\ 连锁\}.$$

因为 $O_1\in\mathscr{O}_1$，所以 $\mathscr{O}_1\neq\phi$。设 $\mathscr{O}_2=\{O_\alpha\}-\mathscr{O}_1$，因为 $\{O_\alpha\}$ 不能被 $\{O_\alpha\}$ 连锁，因此 $\mathscr{O}_2$ 不空。设

$$U=\bigcup_{O\in\mathcal{O}_1}O,\qquad V=\bigcup_{O\in\mathcal{O}_2}O,$$

则 $U\cap V=\phi$, U 和 V 都不空，因此 $X=U\cup V$ 是不连通的. ▮

4.8 定理 设 X 是拓扑空间，则 X 是连通空间当且仅当 X 能被 X 的任意开覆盖单连锁，也就是说，X 的任意两点都能由给定覆盖的有限个开集连锁.

证明 设 X 是连通的，$\{O_\alpha\}$ 是 X 的开覆盖，$x\in X$，又设 $C_x=\{y\mid\{x,y\}$ 被 $\{O_\alpha\}$ 单连锁$\}$. 因为 $x\in C_x$，所以 $C_x\neq\phi$. 我们现在证明 C_x 是既开又闭的. 设 $y\in C_x$，则存在单链

$$\mathcal{O}_n=\{O_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$$

使得 $x\in O_1$, $y\in O_n$. 今对任意 $z\in O_n$，因为 $\mathcal{O}_n$ 是连接 x 与 z 的单链，因此 $z\in C_x$，所以 $O_n\subseteq C_x$，又因为 O_n 是 y 的邻域，从而 C_x 是开的.

设 y 是 C_x 的极限点，则对某个 α，有 $y\in O_\alpha$ 且 $O_\alpha\cap C_x\neq\phi$. 设 $z\in O_\alpha\cap C_x$，又设

$$\mathcal{O}_n=\{O_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$$

是由 x 到 z 的单链. 再设 $k(1\leq k\leq n)$ 是使 $O_\alpha\cap O_k\neq\phi$ 的最小指标. 因为 $O_n\cap O_\alpha\neq\phi$，故这样的 k 必定存在. 因此

$$\mathcal{O}_{k+1}=\{O_i\mid i=1,2,\cdots,k,\alpha\}$$

是由 x 至 y 的单链. 所以 $y\in C_x$. 由此 C_x 是闭的. 再用 4.3(3) 就能完成证明.

反之，设 X 不连通，则

$$X=A\cup B,\ A\neq\phi,\ B\neq\phi,\ A\cap B=\phi,$$

而且 A 和 B 是开的. 设 $a\in A$, $b\in B$，则 $\{A,B\}$ 是一个开覆盖，但没有由开覆盖 $\{A,B\}$ 中的集合构成的连锁 a 与 b 的单链（事实上没有任何链连锁 a 与 b）. 这是一个矛盾，因此 X 是连通的. ▮

4.9 定理 设 X 是拓扑空间，N 是 X 上的连通集，$N\subseteq A\subseteq \overline{N}$，则 A 是连通的．也就是说，一个连通集加上它的任意个极限点后仍然是连通的．

证明 假设 A 不连通，则

$$A=A_1\cup A_2,\ A_1\neq\phi,\ A_2\neq\phi,$$

且 A_1 与 A_2 是分离的．因为 N 是连通的且 $N\subseteq A$，根据 4.5，或者 $N\subseteq A_1$，或者 $N\subseteq A_2$．我们设 $N\subseteq A_1$．因为 N 是连通的而 A 不连通，所以 $A-N\neq\phi$．又因 $A_2\neq\phi$，由此我们可以选取 $x\in A-N$ 且 $x\in A_2$．则因 $A\subseteq\overline{N}$，

$$x\in\overline{N}\subseteq\overline{A}_1,$$

从而 $\overline{A}_1\cap A_2\neq\phi$，这与 A_1 和 A_2 是分离的相矛盾．这个矛盾说明 A 是连通的．∎

例子（和练习）

4.5 空间 X 称为自稠密的，如果每一个 $x\in X$ 都是 $X-\{x\}$ 的极限点．证明每一个多于一个点的连通 T_1 空间是自稠密的．

4.6 考虑

$$X=\{a,\ b\},\ \text{这里}\ \mathscr{O}=\{\{a,\ b\},\ \{b\},\ \phi\}.$$

由此证明：在上面练习 4.5 中，X 必须是 T_1 空间结论才能成立．

4.7 证明在连通 T_1 空间中每一个多于一点的连通集是无限集．

4.8 证明如果 X 是连通空间，

$$\mathscr{C}=\{C_i\mid i=1,\ 2,\ \cdots,n\}$$

是由闭集 C_i 构成的 X 的有限覆盖，则 $\mathscr{C}$ 被 $\mathscr{C}$ 连锁．

4.9 设 X 是拓扑空间，M, $N\subseteq X$, M, N 是连通的．

如果

或者 (a) $M\cap N\neq\phi$ 或者 (b) $M\cap\overline{N}\neq\phi$,

则 $M\cup N$ 是连通的.

4.10 如果 X 是拓扑空间, $N\subseteq M\subseteq X$, M 和 N 是连通的. 假若 $M-N=A\cup B$, 这里 A 和 B 是分离的, 则 $N\cup A$ 是连通的.

4.11 假若我们代替 4.9 已经证明了下面的

定理 4.9(a) 如果 N 是 X 中的连通集, 则 $\overline{N}$ 也是 X 中的连通集.

试根据 4.9(a), 并考虑具有相对拓扑的 A 证明 4.9.

4.12 设 $\{C_\alpha|\alpha\in A\}$ 是某拓扑空间的连通集所成的集族. 如果 $\bigcap_{\alpha\in A}C_\alpha\neq\phi$, 则 $\bigcup_{\alpha\in A}C_\alpha$ 是连通的.

4.13 设 $\{A_i|i=1, 2, \cdots, n\}$ 是有限个连通集所成的集族, 且

$$A_i\cap A_{i+1}\neq\phi,\ i=1, 2, \cdots, n-1.$$

则 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 是连通的.

4.14 设 $A\subseteq X$ 是连通集且 $B\subseteq X$. 假若 $B\cap A\neq\phi$, $B^c\cap A\neq\phi$, 证明 $A\cap\mathrm{Fr}(B)\neq\phi$, 这里 $\mathrm{Fr}(B)$ 是 B 的边界 (参看 1.16). 由此推出在连通空间中若 $B\neq\phi$, $B\neq X$, 则 $\mathrm{Fr}(B)\neq\phi$.

4.15 设 A 和 B 是拓扑空间 X 的闭子集. 如果 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 是连通的, 则 A 和 B 是连通的. 用反例说明 A 与 B 必须是闭的, 也就是说若 A 与 B 中有一个不闭, 则一般说来本定理不成立.

§3 连通分支

在某些拓扑空间中考察最大连通子集有时是有趣的. 我们能

由研究空间的一些称为连通分支的子集做到这点．连通分支的定义如下．

4.10 定义 设 X 是拓扑空间，$M\subseteq X$ 且 $x\in M$．则 x **在** M **中的连通分支** C_x 是 M 的所有包含 x 的连通子集之并．即是

$$C_x=\{y|x \text{ 和 } y \text{ 在 } M \text{ 的同一个连通子集中}\}.$$

4.11 定理 设 X 是拓扑空间，C_x 是 X 中 M 的连通分支，则

(1) C_x 是连通的．

(2) 就下列性质而论 C_x 是最大的：

(a) $x\in C_x$，

(b) C_x 是 M 的连通子集，

也就是说，如果 $A\subseteq M$，$x\in A$ 且 A 是连通的，则 $A\subseteq C_x$．

证明(1) 设 $y\in C_x$，定义 A_y 是使 $x, y\in A_y$ 的 M 的连通子集．对任何 $y\in C_x$，因为 $x\in A_y$，根据练习 4.12，$\bigcup_{y\in C_x} A_y$ 是连通的．又显然有

$$C_x\subseteq \bigcup_{y\in C_x} A_y.$$

另一方面，如果 $z\in \bigcup_{y\in C_x} A_y$，则对某个 y 有 $z\in A_y$，因为 $x\in A_y$ 且 A_y 是连通的，所以 x 和 z 属于 M 的同一连通子集，从而 $z\in C_x$．因此

$$\bigcup_{y\in C_x} A_y\subseteq C_x, \text{ 故有 } C_x=\bigcup_{y\in C_x} A_y,$$

所以 C_x 是连通的．

(2) 设 $A\subseteq M$，$x\in A$ 且 A 是连通的．对任意 $z\in A$，x 和 z 都在 M 的连通子集 A 中，从而 $z\in C_x$，所以 $A\subseteq C_x$．▌

直到定理 4.11 建立，我们都是用一种颇为麻烦的方式在谈论集合的连通分支．我们必须论及 x 在 M 中的连通分支．现在我们知道连通分支不过是集合 M 的最大连通子集，因此不必涉及

“x 在 M 中的连通分支”而能直接地说 M 的连通分支. 关于这一点也可以参看练习 4.18.

4.12 定理 设 X 是拓扑空间, M 是 X 的闭子集且 $x \in M$, 则 x 在 M 中的连通分支 C_x 也是 X 中的闭集.

证明 因为 $C_x \subseteq \bar{C}_x$, 根据 4.9 知 $\bar{C}_x$ 是连通的. 又因为 M 是闭的, 所以由 $C_x \subseteq M$ 可以得出 $\bar{C}_x \subseteq \bar{M} = M$. 最后根据 4.11(2) 有 $C_x = \bar{C}_x$, 从而 C_x 是闭的. ▮

例子(和练习)

4.16 如果 X 是拓扑空间, $M \subseteq X$ 是开的, 则除了已经讨论过的之外, 一般地关于 M 的连通分支所得到的结果很少. 特别是关于连通分支是否是开的, 或者是否是闭的, 或者两者都不是这样的问题, 我们谈不出什么. 试考虑空间

$$X = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad y = \frac{1}{n}x,$$

$$n = 1, 2, \cdots, \text{ 或 } y = 0\},$$

它具有实平而诱导的相对拓扑. 设 $M = X - \{(0, 0)\}$ 又设 $z = (1, 0)$, 则 M 是开的, 且 z 在 M 中的连通分支

$$C_z = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, \; y = 0\}.$$

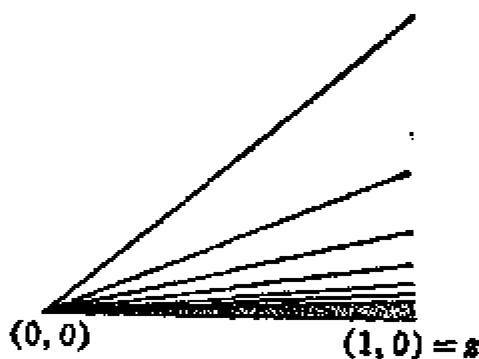


图 4.1

在 X 中 C_z 是闭的吗?不是, 因为 $(0, 0) \notin C_z$. 在 X 中 C_z 是开的吗? 也不是, 因为当 n 充分大时, z 的任何邻域都含有形如 $(1, 1/n)$ 的点. X 的图形见图 4.1.

4.17 X 是拓扑空间, $x \in M \subseteq X$, 如果 $y \in C_x$, 证明 $C_x = C_y$.

4.18 设 X 是拓扑空间，$M\subseteq X$，$x, y\in M$，定义 $x\sim y$ 当且仅当存在 M 的连通子集 N，使得 $x, y\in N$. 证明"$\sim$"是 M 中的等价关系，并进一步证明在 M 中由"$\sim$"导出的等价类正好是 M 的连通分支.

§4 局部连通性

我们将介绍空间的一个性质，这个性质将允许我们对开集的连通分支作出某些结论. 与闭集的情况类似，如果在某类空间中，至少有开集的连通分支是开集，这将是令人满意的. 对这种具有我们所希望性质的空间，让我们先给它一个新名称.

4.13 定义 拓扑空间 X 称为**局部连通的**，当且仅当开集的连通分支是开的.

将"局部连通"这样的名称用在定义 4.13 中的空间上看来似乎选择不当，然而我们立即便可看出这与另外的局部性质，即局部紧性的定义是完全一致的. 下一个定理正说明局部连通性的定义象我们希望的那样与定义 3.29 类似.

4.14 定理 设 X 是拓扑空间，则 X 是局部连通空间当且仅当 X 有连通集构成的基，也就是说，对每一点 $x\in X$ 以及每一个 $U\in\mathscr{U}_x$，存在连通的开集 V，使得 $V\in\mathscr{U}_x$，$V\subseteq U$.

证明 设 X 是局部连通的. 定义

$$\mathscr{B}=\{C\,|\,C\subseteq X \text{ 且 } C \text{ 是连通的开集}\}.$$

我们证明 $\mathscr{B}$ 是基. 显然 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{O}$，又设 $x\in X$，$U\in\mathscr{U}_x$，则存在 $O\in\mathscr{O}$，使得 $x\in O\subseteq U$. 设 $V=O_x$ 是 x 在 O 中的连通分支，根据 4.13 有 V 是开的，又根据 4.11(1) 知 V 是连通的，因此 $V\in\mathscr{B}$. 从而 $x\in V\subseteq O\subseteq U$，由此得出 $\mathscr{B}$ 是基.

反之，设 $\mathscr{B}$ 是由 X 的连通集构成的基. 又设 $M\subseteq X$ 是开的，$x\in M$，C_x 是 x 在 M 中的连通分支. 对 $y\in C_x\subseteq M$，存在 $U\in\mathscr{B}$，

使得 $y\in U\subseteq M$. 因为 $y\in U$ 且 U 是连通的, 根据 4.11, $U\subseteq C_y$, 这里 C_y 是 y 在 M 中的连通分支. 但是由练习 4.17 知 $C_x=C_y$. 由此对每一点 $y\in C_x$, 存在 $U\in\mathscr{U}_x\cap\mathscr{B}$ 使得 $y\in U\subseteq C_x$, 因此 C_x 是开的. ∎

应当向学生指出, 定义 4.13 有些独特. 如果看另外的拓扑课本, 他将发现局部连通空间不是象我们这样而是象定理 4.14 描述的那样定义的, 也就是说, 每一点的每一个邻域都包含一个连通子邻域. 然而一旦证明了 4.14, 无论怎样定义局部连通性也就没有什么差别, 而且我们的定义还更直观一些.

例子 (和练习)

4.19 证明空间 X 是局部连通的当且仅当对每个 $U\in\mathscr{U}_x$, x 在 U 中的连通分支 C_x 也属于 $\mathscr{U}_x$.

4.20 设

$$X=\{(x,\ y)\mid x=\frac{1}{n},\ 0\leq y\leq 1,\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$$

$$\cup\{(0,\ 0),\ (0,\ 1)\}$$

具有由平面的寻常拓扑诱导的相对拓扑. 证明 $\{(0,\ 0)\}$ 与 $\{(0,\ 1)\}$ 是 X 中的连通分支. 进而证明如果 $D\subseteq X$ 是既开又闭的, 则或者 $\{(0,\ 0)\}$ 与 $\{(0,\ 1)\}$ 都是 D 的子集, 或者两者都不是 D 的子集.

4.21 设 X 是局部连通的连通空间.

(a) 如果 C 是开集 $A\subseteq X$ 的连通分支且 $A\neq X$, 则 $\mathrm{Fr}(C)\subseteq A^c$. (参看 1.16)

(b) 设 M 和 N 是 X 中不相交的非空闭集. 证明存在 $(M\cup N)^c$ 的连通分支 C, 使得 $\bar{C}\cap M\neq\phi$ 和 $\bar{C}\cap N\neq\phi$.

(c) 设 B 是 X 中的闭集，$B\neq X$，C 是 B 的连通分支，证明 $C\cap\overline{B^c}\neq\phi$.

4.22 设 $f:X\to Y$ 是满的闭映射且 X 是局部连通的. 证明 Y 是局部连通的.

4.23 证明局部连通空间的任意开子集也是局部连通的.

4.24 (学期论文·三年级用)对每一个 $\alpha\in A$，设 X_α 是 Hausdorff 空间.

(a) 证明 $\bigtimes_{\alpha\in A} X_\alpha$ 是连通空间当且仅当每一个 X_α 是连通的.

(b) 证明 $\bigtimes_{\alpha\in A} X_\alpha$ 是局部连通空间当且仅当每一个 X_α 是局部连通的且至多除有限个外每一个 X_α 是连通的.

[对(a)的提示：首先证明如果 $f:X\to Y$ 是连续的，Y 是 Hausdorff 空间，$D\subseteq X$ 在 X 中稠密，$f(D)=y_0\in Y$，y_0 是 Y 的一个定点，则 $f(X)=y_0$. 假若 $\bigtimes_{\alpha\in A} X_\alpha=X$ 不连通，由 4.3 可定义 $f:X\to R$ 使得 $f(X)=\{a, b\}$，$a\neq b$，$a, b\in R$. 用在练习 2.22 中得到的同胚性证明在练习 2.22 中定义的形如 X'_β 的集合上 f 是常值函数(例如说 $f(x)=a$). 如同在练习 2.22 中一样，设

$$X'_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}=\{x\mid \text{对 } i=1, 2, \cdots, n, \alpha\neq\beta_i \text{ 时 } x_\alpha=x'_\alpha \text{ 且 } x_{\beta_i} \text{ 是任意的}\},$$

证明对 $x\in X'_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}$，$f(x)=a$. 然后证明形如 $X'_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}$ 的集合在 X 中稠密，最后由 $f^{-1}(b)=\phi$ 得出矛盾.]

[对(b)的提示：使用(a)]

§5 弧连通性

最后，我们着手讨论又一类在拓扑学的其他分支中有相当多

用途的连通性. 引入新概念的动机是我们相当熟悉的某些空间都有这样的性质: 点能够由弧连接. 例如实直线, 实平面或欧氏空间 $E^n=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} R_i$ 就是这样, 其中 R_i 是具有寻常拓扑的实直线. 现在推广这个概念如下.

4.15 定义 (1) 设 X 是拓扑空间, $A\subseteq X$, $I=\{x\mid 0\leqq x\leqq 1$, x 是实数$\}$并具有由实直线的寻常拓扑诱导的相对拓扑. 如果在 I 与 A 之间存在同胚 h, 则称 A 是弧. 这时我们称弧 A 由点 $x_0=h(0)$ 至点 $x_1=h(1)$, 或简单地称为由 x_0 至 x_1.

(2) 设 X 是拓扑空间, 如果对任意 x, $y\in X$, 存在由 x 至 y 的弧, 则称 X 是弧连通的.

我们对弧连通空间不作广泛的探讨, 而只限于介绍下面的两个定理.

4.16 定理 设 X 是弧连通空间, 则 X 是连通的.

证明 设 $x\in X$, 对每一点 $y\in X$, 设 $I_{xy}=h(I)$ 是由 x 至 y 的弧, 则 $x\in\bigcap\limits_{y\in X} I_{xy}$, 因此这个交不空. 根据 4.4, 每一个 I_{xy} 是连通的, 所以由练习 4.12 知 $\bigcup\limits_{y\in X} I_{xy}=X$ 是连通的. ▮

4.17 定理 弧连通性是拓扑性质.

证明 设 $f:X\to Y$ 是同胚, y_1, $y_2\in Y$, 则存在 x_1, $x_2\in X$ 使得 $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$. 因为 X 是弧连通的, 所以存在同胚 $h:I\to X$ 使得 $h(0)=x_1$, $h(1)=x_2$. 从而 $fh:I\to Y$ 是 I 至 Y 的同胚并且使 $fh(0)=y_1$ 和 $fh(1)=y_2$, 因此 Y 是弧连通的. ▮

例子(和练习)

4.25 具有由平面寻常拓扑诱导的相对拓扑, 空间

$$X=\left\{(x,\ y)\mid y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leqq\frac{1}{\pi}\right\}\cup\{(0,\ 0)\}$$

不是弧连通空间，但它是连通的.

4.26 不是每一个弧连通空间都是局部连通的，请考虑练习 4.16 中的空间.

4.27 现在，我们利用在这一章中迄今为止所得到的某些结果来证明一个不动点定理. 证明：如果 $f:I\to I$ 是映射，则存在 $x\in I$ 使得 $f(x)=x$，这里 $I=\{x\mid 0\leq x\leq 1,\ x \text{ 是实数}\}$. [提示：如果 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$，则证明完成. 如果这两者均不发生，则 $f(0)>0$，$f(1)<1$. 在弧连通空间 $I\times I$（为什么？）中，设

$$U=\{(x,\ y)\mid 1\geqq y>x\geqq 0\},$$

又设 $x_0=(0,\ f(0))$ 与 $x_1=(1,\ f(1))$，则

$$x_0\in U,\quad x_1\in U^c$$

且 $f:I\to I$ 确定了由 x_0 至 x_1 的一条道路，即是说确定了由 x_0 至 x_1 的一个[0, 1]的连续象. 设 $A=f(I)$，则 $A\cap U\neq\phi$ 且 $A\cap U^c\neq\phi$. 由此根据练习 4.14

$$A\cap \mathrm{Fr}(U)\neq\phi.$$

再证明

$$\mathrm{Fr}(U)=\{(x,\ y)\mid x=y,\ 0\leq x\leq 1\}.$$

并证明如果 $(x,\ y)\in A\cap \mathrm{Fr}(U)$，则 $f(x)=x$.]

作为这一章最后的题材，我们讨论事物的另一方面，也就是说考察尽可能不连通的空间. 为此目的，我们注意空间的连通分支. 如果这个空间是尽可能不连通的，我们可以认为它的连通分支尽可能小，即是说是一个点. 由此作出下一个定义.

4.18 定义 空间 X 称为完全不连通的，当且仅当它的所有连通分支都是点.

有许多这类空间的例子. 任何具有离散拓扑的空间是完全不

连通的．有理数集作为实直线的子空间是完全不连通的．任何有限T_1空间也是完全不连通的．下面讨论一个更有趣的例子．

例子（和练习）

设

$I=\{x|0\leq x\leq 1,\ x$ 是实数$\}$

$I_1^1=\{x|1/3<x<2/3,\ x$ 是实数$\}$, $C_1=I-I_1$

$I_2^1=\{x|1/9<x<2/9\}$, $I_2^2=\{x|7/9<x<8/9\}$,

$\quad C_2=C_1-(I_2^1\cup I_2^2)$

$\vdots$

$I_n^1=\{x|1/3^n<x<2/3^n\}$, $I_n^2=\{x|7/3^n<x<8/3^n\}$,

$\quad \cdots,\ I_n^n=\{x|(3^n-2)/3^n<x<(3^n-1)/3^n\}$,

$\quad C_n=C_{n-1}-\left(\bigcup_{i=1}^{n}I_n^i\right)$, 最后

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n.$$

我们所做的事情是在单位区间中去掉中间三分之一这个开区间，然后，以后的每一步都是在前面一步已经去掉三分之一后留下的每个区间上再去掉这个区间的三分之一开区间．见图 4.2

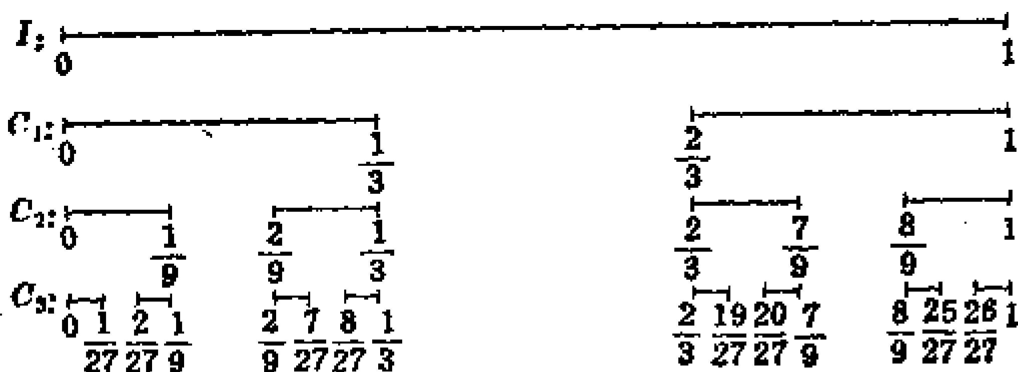


图 4.2

我们对C知道得很多，它被称为 Cantor 集，有时也被

称为 Cantor 三分集.

下面叙述几个留给学生证明的事实.

4.28 如果我们同意将所有 $x(0\leqq x\leqq 1)$ 用三进制的数表示(也就是说只出现数字 0, 1, 2). 又如果将最后是一串无限多个零, 而这一串零前面是一个 1 的无限循环小数表示为如下形式: 将上面提到的小数中的一串无限多个零换为 2, 而将这一串无限多个零前面的一个 1 换为 0, 例如将 .001000… 表示为 .000222…, 将 .1000… 表示为 .0222…. 则 C 的点正好是用三进制表出后不出现数字 1 的小数.

4.29 由上面的练习 4.28 显然可以得出, 在集合 2^{Z^+} 与 C 之间存在一一对应. 这里 2^{Z^+} 表示由

$$Z^+=\{n|n\text{ 是正整数}\}$$

到 $\{0, 2\}$ 的全体函数构成的集合. 2^{Z^+} 也可以记为 $2^{\aleph_0}$, 它是一个不可数集, 因此 C 也是不可数的.

4.30 C 是 R 中的闭集.

4.31 C 是自稠密的, 也就是说对每一点 $x\in C$, x 是 $C-\{x\}$ 的极限点.

4.32 C 在 I 中是无处稠密的, 即是如果 $x, y\in C$, $x<y$, 则存在区间 $J\subseteq I-C$, $J=(a, b)$, $x<a<b<y$.

4.33 C 是完全不连通的. [提示: 用上面练习 4.32.]

4.34 C 是紧的. [提示: 注意到 I 是紧的及练习 4.30.]

任意一个紧的、完全不连通的、自稠密的度量空间(下一章给出定义) 与 Cantor 集同胚, 但在这里我们不打算给出它的证明. 为了证明这一点, 有兴趣的学生可以学习更深入的拓扑学著作, 例如 Hocking 与 Young 的《拓扑学》一书第 100 页. 能够对 Cantor 集作出这些注释的原因在

于，对 Cantor 集而言，前面叙述的性质是全系不变量．也就是说一个拓扑空间如果具有前面给出的性质，即它是紧的、完全不连通的、自稠密的度量空间，则它与 Cantor 集是拓扑地相同．当然，它可能与 Cantor 集在其他非拓扑方面有区别，例如说，空间的点是蓝色或者称为萨姆（译注：人名）对拓扑学家说来是无关紧要的．

4.35 连通拓扑空间 X 中的点 x 称为 X 的割点，如果 $X-\{x\}$ 不连通．证明以下各点：

(a) 如果 X 与 Y 在 f 下同胚且 x 是 X 的割点，则 $f(x)$ 是 Y 的割点．

(b) 实直线上的每一点都是割点．

(c) 实平面没有割点；

(d) 实直线与实平面不同胚．

第五章　度量空间

§1　定　义

我们现在致力于讨论比较特殊的一类拓扑空间．每一个这样的空间都定义了距离函数，因此我们能够说出点之间的距离是多少．就某种意义而言，称为度量空间的这些拓扑空间是颇为特殊的．以后可以看出，在比一般拓扑空间较少的限制条件下，度量空间将具有迄今为止我们已经讨论过的那些性质．另一方面，这些空间又是相当一般的，分析中所有通常的空间都是度量空间．下面分两步定义度量空间．我们首先引入下一个定义．

5.1 定义　设 X 是一个集合，ρ: $X\times X\to R$ 是 $X\times X$ 到 R 的函数(不必是连续的)，R 是实数集．如果 ρ 满足

(1) $\rho(x, y)\geqq 0$; $\rho(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$,

(2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$,

(3) $\rho(x, y)+\rho(y, z)\geqq\rho(x, z)$,

则称(X, ρ)为度量集，称 ρ 为 X 的度量．

5.1 具有如此的普遍性，以至每一个集合都可以成为度量集，因为可以定义 $x\neq y$ 时 $\rho(x, y)=1$, $x=y$ 时 $\rho(x, y)=0$．要证明具有这样定义的 ρ 的任意集合 X 形成度量集是简单的．我们要探求的是生成 X 的拓扑的度量．为此先作出下一个定义．

5.2 定义　设(X, ρ)是度量集，对 $x\in X$，定义

$$S_\varepsilon(x)=\{y\,|\,y\in X,\ \rho(x, y)<\varepsilon\},\ \ \varepsilon>0\text{ 是实数},$$

又定义

$$\mathscr{B}=\{S_\varepsilon(x)\,|\,x\in X,\ \varepsilon>0\}.$$

则以 $\mathscr{B}$ 为基的 X 称为度量空间. 这样产生的拓扑称为由 ρ 产生的度量拓扑.

现在，只有对数学十足外行的人才会企图去证明定义. 但是，上面的定义作出了某些需要证明的结论，尤其是这个定义判断 $\mathscr{B}$ 是基，这一点不经过证明可能并不是那么显然. 下面就处理这个细节.

5.3 定理 对度量集 (X, ρ) 而言，$\mathscr{B}=\{S_\varepsilon(x)\mid x\in X,\ \varepsilon>0\}$ 是其上某个拓扑的基.

证明 用 1.29 证明这个定理. 因为对每一点 $x\in X$，显然 $x\in S_\varepsilon(x)$，所以

$$\bigcup_{S_\varepsilon(x)\in\mathscr{B}} S_\varepsilon(x)=X.$$

现在设 $x\in X$，又设 $S_{\varepsilon_1}(x_1),\ S_{\varepsilon_2}(x_2)\in\mathscr{B}$，使得

$$x\in S_{\varepsilon_1}(x_1)\cap S_{\varepsilon_2}(x_2).$$

又设 $\rho(x, x_1)=d_1<\varepsilon_1,\ \rho(x, x_2)=d_2<\varepsilon_2$ 且设

$$\varepsilon=\min(\varepsilon_2-d_2,\ \varepsilon_1-d_1).$$

现在考虑 $S_\varepsilon(x)$. 设 $y\in S_\varepsilon(x)$，则 $\rho(y, x)<\varepsilon$. 因为

$$\begin{aligned}\rho(y, x_2)&\leqq\rho(y, x)+\rho(x, x_2)<\varepsilon+d_2\\&\leqq(\varepsilon_2-d_2)+d_2=\varepsilon_2,\end{aligned}$$

所以 $y\in S_{\varepsilon_2}(x_2)$. 又

$$\begin{aligned}\rho(y, x_1)&\leqq\rho(y, x)+\rho(x, x_1)<\varepsilon+d_1\\&\leqq(\varepsilon_1-d_1)+d_1=\varepsilon_1,\end{aligned}$$

因此 $y\in S_{\varepsilon_1}(x_1)$. 这样，我们找到了 $S_\varepsilon(x)\in\mathscr{B}$，使得

$$S_\varepsilon(x)\subseteq S_{\varepsilon_1}(x_1)\cap S_{\varepsilon_2}(x_2),$$

根据 1.29，$\mathscr{B}$ 是基. ▮

注 在 5.2 中定义的并在 5.3 中广泛使用的 $S_\varepsilon(x)$ 称为 x 的 ε-球邻域.

出现在 5.3 中关于度量的这类计算是度量空间中十分典型的运算. 学生应当熟悉这类计算的技巧, 并绘制适当的图形帮助自己理解. 例如 5.3 证明中 ε 的选取就是受了图 5.1 所示情况的启发.

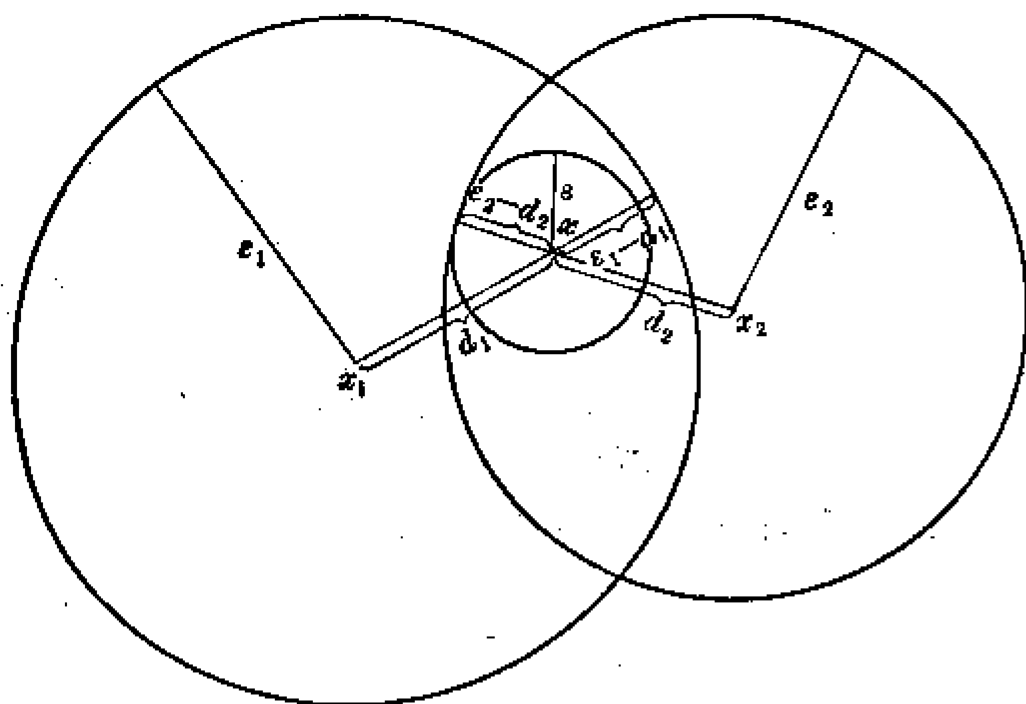


图 5.1

有这种情况, 给定空间 X, 我们希望知道是否可能定义一个度量 ρ, 使得根据 5.2 由这个度量产生的拓扑正好与原来那个拓扑相同. 对于具有这种可能性的空间, 我们给它一个定义:

5.4 定义 设 X 是以 $\mathscr{T}$ 为拓扑的拓扑空间. 如果能够定义度量 ρ, 使得由 ρ 产生的度量拓扑与 $\mathscr{T}$ 相同, 则称 X 为**可度量化空间**.

例子 (和练习)

5.1 实直线 R 连同 $\rho(x, y)=|x-y|$ 是一个度量空间, 这样定义的度量产生与 R 的寻常拓扑相同的拓扑.

5.2 实平面连同

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$$

是一个度量空间，这样定义的度量产生与实平面的寻常拓扑相同的拓扑.

5.3 设(X, ρ)和(X', ρ')是度量空间，f是由X到X'的关系，也就是说，f是以X为定义域，X'为值域的也许为多值的函数. 对任意$x, y \in X$，设有$\rho(x, y) = \rho'(f(x), f(y))$，这里$f(x)$（或$f(y)$）表示$f$在$x$（或$y$）的任意一个值，则$f$称为由$X$到$X'$的等距. 如果$f$是一个等距，证明它是一个同胚（$f$可能不是满的）.

5.4 如果f是X到自身的等距且X是紧的，则练习5.3最后一句话指出的情况不可能发生，也就是说，如果$f: X \to X$是等距且X是紧的，则f一定是满的.

5.5 设X是集合，$\rho(x, y)$是$X \times X$上的实值函数且满足

(a) $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

(b) 对任意$x, y, z \in X$，$\rho(x, y) \leqq \rho(x, z) + \rho(y, z)$. 则$(X, \rho)$是度量集.

注 着手解答下面三个练习之前，注意到这一点是有用的：在每一个度量空间X中，如果$A \subseteq X$且x是A的极限点，则有由A的互不相同的点组成的序列$\{x_n\}$，使得$\lim_n x_n = x$.

5.6 设X是具有度量ρ的度量空间且$\phi \neq A \subseteq X$. 定义A的直径$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y)$，也就是说，它是$A$中点之间距离的最小上界. 证明

(a) 如果$A \subseteq B$，则$\delta(A) \leqq \delta(B)$.

(b) $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

(c) 如果A是紧的，则存在$x, y \in A$，使得$\delta(A) = \rho(x, y)$.

(d) 存在集合A（显然不是紧的），对所有$x, y \in A$，都有$\rho(x, y) < \delta(A)$.

5.7　设 X 是以 ρ 为度量的度量空间，对 $x\in X$，$\phi\neq A\subseteq X$ 定义 $\rho(x, A)=\inf\limits_{y\in A}\rho(x, y)$．称 $\rho(x, A)$ 为点 x 到集合 A 的距离．证明

(a) 如果 A 是紧的，则存在点 $y\in A$，使得 $\rho(x, A)=\rho(x,y)$．

(b) 存在集合 A（显然不是紧的），对所有 $y\in A$，都有 $\rho(x,A)<\rho(x, y)$．

(c) $\overline{A}=\{x|\rho(x, A)=0\}$

5.8　设 X 是以 ρ 为度量的度量空间，$\phi\neq A\subseteq X$，$\phi\neq B\subseteq X$．定义 A 到 B 的距离

$$\rho(A, B)=\inf_{x\in A, y\in B}\rho(x, y).$$

证明

(a) $\rho(A, B)=\rho(\overline{A}, \overline{B})$．

(b) 如果 A 和 B 是紧的，则存在 $x\in A$，$y\in B$，使得 $\rho(A,B)=\rho(x, y)$．

(c) 存在闭集 A 和 B（显然不同时是紧的），对所有 $x\in A$，$y\in B$ 都有

$$\rho(A, B)<\rho(x, y).$$

(d) 对任意集合 $A, B, C\subseteq X$，有

$$\rho(A, C)\leq\rho(A, B)+\rho(A\cup B, C)+\delta(B).$$

(e) 对任意集合 $A, B, C\subseteq X$，有

$$\rho(A, C)\leq\rho(A, B)+\rho(B, C)+\delta(B).$$

给出 $\delta(B)\neq 0$ 且等式成立的例子．

§2　度量空间的某些性质

更有趣的问题之一是试图解决哪一类空间是可度量化的．在

解决这个问题之前，让我们考察度量空间的某些性质．度量空间有相当强的结构，这可由下列定理证实．

5.5 定理 每一个度量空间都是 Hausdorff 空间．

证明 设 $x, y\in X$, $x\neq y$，则 $\rho(x, y)=d>0$．设 $\varepsilon=\frac{d}{2}$ 且设 $U=S_\varepsilon(x)$, $V=S_\varepsilon(y)$，则 U 和 V 是开集，因此我们只需证明 $U\cap V=\phi$.

假若 $U\cap V\neq\phi$，则存在 $z\in U\cap V$．由 $x\in U$ 有 $\rho(z, x)<\varepsilon$．同样有 $\rho(y, z)<\varepsilon$．由此

$$\rho(x, y)\leqq\rho(x, z)+\rho(y, z)<2\varepsilon=d.$$

又 $d=\rho(x, y)<d$．这个明显的矛盾说明

$$U\cap V=\phi,$$

因此，X 是 Hausdorff 空间．▌

5.6 定理 每一个度量空间都是正规空间．

证明 我们已经知道，如果 X 是度量空间，则它也是一个 Hausdorff 空间，因此它是 T_1 空间．这样，我们只需证明如果 A 和 B 是 X 的不相交的闭子集，则存在开集 U, V，使得 $A\subseteq U$, $B\subseteq V$，且 $U\cap V=\phi$.

对每一点 $a\in A$，显然 a 不是 B 的极限点．因为，如果 a 是 B 的极限点，由于 B 是闭的，故应有 $a\in B$，从而 $a\in A\cap B=\phi$，但这是不可能的．由此对每一点 $a\in A$，存在 $\varepsilon_a>0$，使得 $S_{\varepsilon_a}(a)\cap B=\phi$．设 $U_a=S_{\varepsilon_a/2}(a)$．对每一点 $b\in B$，同样存在 $\varepsilon_b>0$，使得 $S_{\varepsilon_b}(b)\cap A=\phi$．设 $V_b=S_{\varepsilon_b/2}(b)$．最后设

$$U=\bigcup_{a\in A}U_a,\quad V=\bigcup_{b\in B}V_b,$$

则 U 和 V 是开的．

我们现在证明 $U\cap V=\phi$．假若 $U\cap V\neq\phi$，设 $x\in U\cap V$，则对某个 a 有 $x\in U_a$，对某个 b 有 $x\in V_b$，因此 $\rho(x, a)<\varepsilon_a/2$, $\rho(x, b)$

$<\varepsilon_b/2$ 且

$$\rho(a,\ b) \leqq \rho(a,\ x)+\rho(x,\ b)<\frac{1}{2}(\varepsilon_a+\varepsilon_b).$$

如果 $\varepsilon_a \leqq \varepsilon_b$, 则

$$\rho(a,\ b)<\frac{1}{2}(\varepsilon_a+\varepsilon_b) \leqq \varepsilon_b$$

从而 $a \in S_{\varepsilon_b}(b)$, 所以 $S_{\varepsilon_b}(b) \cap A \neq \phi$, 这与 ε_b 的选取矛盾. 另一方面, 如果 $\varepsilon_b \leqq \varepsilon_a$, 则

$$\rho(a,\ b)<\frac{1}{2}(\varepsilon_a+\varepsilon_b) \leqq \varepsilon_a$$

从而 $b \in S_{\varepsilon_a}(a)$, 所以 $S_{\varepsilon_a}(a) \cap B \neq \phi$, 这与 ε_a 的选取矛盾. 因此必定有 $U \cap V=\phi$, 所以 X 是正规的. ▌

对度量空间性质的进一步探讨表明, 以前不相同的一些概念在度量空间中等价. 下面几个定理可以说明这一点.

5.7 定理 设 X 是度量空间, 则 X 是可分空间当且仅当 X 是第二可数的.

证明 设 X 是可分的, 又设

$$D=\{x_i \mid i=1,\ 2,\ \cdots\}$$

是可数稠密子集, 再设

$$\mathscr{B}=\{S_r(x_i) \mid x_i \in D,\ r \text{ 是大于零的有理数}\}.$$

因为有理数集是可数的, 从而作为可数个形如

$$\{S_r(x_i) \mid x_i \text{ 固定},\ r \text{ 是大于零的有理数}\}$$

的可数集之并, $\mathscr{B}$ 是可数的开集族. 我们现在证明 $\mathscr{B}$ 是基.

设 $x \in X$, $U \in \mathscr{U}_x$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得 $S_\varepsilon(x) \subseteq U$. 如果对某个 i, $x=x_i$, 可选取有理数 r, 使 $0<r<\varepsilon$, 从而

$$x \in S_r(x) \subseteq S_\varepsilon(x) \subseteq U.$$

如果对任意 i, $x \neq x_i$, 则 x 是 D 的极限点, 因此有这样的 i 存在, 使得 $x_i \in S_{\varepsilon/3}(x)$. 选取有理数 r, 使得 $\varepsilon/3<r<\varepsilon/2$, 则因 $\rho(x,\ x_i)$

$<\varepsilon/3<r$，从而 $x\in S_r(x_i)$．如果 $y\in S_r(x_i)$，则

$$\rho(x,\ y)\leq\rho(x,\ x_i)+\rho(x_i,\ y)<\varepsilon/3+\varepsilon/2=\frac{5}{6}\varepsilon<\varepsilon,$$

因此 $y\in S_\varepsilon(x)$，从而有

$$x\in S_r(x_i)\subseteq S_\varepsilon(x)\subseteq U.$$

在任何情况下我们都已经找到 $S_r(x_i)\in\mathscr{B}$ 使 $x\in S_r(x_i)\subseteq U$，因此 $\mathscr{B}$ 是基．

反过来的证明已由 1.32 解决．▌

5.8 引理 X 是列紧的度量空间，则对 $\varepsilon>0$，存在有限集 F_ε，使得 $X=\bigcup\limits_{x\in F_\varepsilon}S_\varepsilon(x)$．

证明 假若这个定理不成立．选取 $x_1\in X$，则 $X\neq S_\varepsilon(x_1)$，因此我们可以选取 $x_2\in X-S_\varepsilon(x_1)$．注意到 $\rho(x_1,\ x_2)\geq\varepsilon$，我们又有

$$X\neq\bigcup_{i=1}^{2}S_\varepsilon(x_i).$$

如此继续，在第 n 步，

$$X\neq\bigcup_{i=1}^{n}S_\varepsilon(x_i),$$

因此可以选取 $x_{n+1}\in X-\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_\varepsilon(x_i)$．且有

$$\rho(x_i,\ x_j)\geq\varepsilon \text{ 对 } i\neq j,\ 1\leq i,\ j\leq n+1.$$

考虑这样得出的序列 $\{x_n\}$．因为 $i\neq j$ 时 $x_i\neq x_j$，因此它是 X 的无限子集．因此，由于 X 是列紧的，则 $\{x_n\}$ 有极限点 $x_0\in X$．这样一来，有 $\{x_n\}$ 的无限多个点在 $S_{\varepsilon/2}(x_0)$ 中，在这样的点中我们取两个不相同的点 x_m 和 x_n．则

$$\rho(x_m,\ x_n)\leq\rho(x_m,\ x_0)+\rho(x_n,\ x_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

这与 $\rho(x_m,\ x_n)\geq\varepsilon$ 矛盾．这个矛盾证明引理成立．▌

5.9 引理 每一个列紧的度量空间都是第二可数的。

证明 对每一个正整数 n，设 $F_{1/n}$ 是使

$$\bigcup_{x\in F_{1/n}} S_{1/n}(x)=X$$

成立的有限集，这里 $F_{1/n}$ 的存在已由 5.8 保证．设 $D=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$，则 D 是可数个有限集之并因而是可数的．我们现在证明 $\overline{D}=X$．设 $x\in X-D$，$\varepsilon>0$．选取 $n>0$，使得 $1/n<\varepsilon$，因为

$$X=\bigcup_{x\in F_{1/n}} S_{1/n}(x),$$

所以存在 $y\in F_{1/n}\subseteq D$，使得 $x\in S_{1/n}(y)$，
从而

$$\rho(x,\ y)<\frac{1}{n}<\varepsilon \quad 和 \quad y\in S_\varepsilon(x).$$

由此对每个 $\varepsilon>0$，存在 $y\in D\cap S_\varepsilon(x)$，所以 $x\in\overline{D}$，因而 $\overline{D}=X$．这说明 X 是可分的，根据 5.7，X 也是第二可数的．▌

5.10 定理 度量空间是紧的当且仅当它是列紧的．

证明 根据 3.26，由紧性可以得出列紧性．反之，如果 X 是列紧的，根据 5.9，X 是第二可数的．因为 X 是度量空间，根据 5.5 它也是 Hausdorff 空间，从而它是 T_1 空间．这样，我们希望的结论即可由 3.28 得出．▌

例子（和练习）

5.9 回过头来考察定义 3.22．现在我们证明 T_1 空间 X 是完全正规空间当且仅当对 X 的任意两个分离子集 A 与 B，存在不相交的开集 U 和 V，使得 $A\subseteq U$，$B\subseteq V$．

5.10 证明每一个度量空间是完全正规空间．[提示：首先证明度量空间的每一个子空间是度量空间，也就是说，如果 $A\subseteq X$，则度量拓扑与相对拓扑一致.]

5.11 如果 X 是度量空间，映射 $\rho: X\times X\to R$ 由 $\rho[(x, y)]=\rho(x, y)$ 定义，也就是说它是 x 到 y 的距离，证明 ρ 是连续函数.

5.12 试证如果 X 是连通度量空间，则对每一点 $x\in X$，函数 $f_x(y)=\rho(x, y)$ 有介值性质 [也就是说，如果 $f_x(y_1)=a<c<b=f_x(y_2)$，则存在 $y\in X$ 使得 $f_x(y)=c$].

5.13 试证存在非连通的度量空间 X，使得对每一点 $x\in X$，$f_x(y)=\rho(x, y)$ 有介值性质.

5.14 试证可分度量空间的任意子空间也是可分度量空间. [提示：用5.7和练习1.72]. 进而证明如果 X 不是度量空间，则这个结果可能不成立 [提示：考虑练习1.74中的空间 J，令 J 在 E 中的边界 $P=\mathrm{Fr}(J)$ 为子空间].

5.15 X 是以 ρ 为度量的度量空间. 如在练习5.8中那样定义 $\rho(A, B)$. 证明 $\rho(A, B)$ 一般说来不是 X 的所有子集所成集合上的度量.

现在定义 $S_\varepsilon(A)=\bigcup_{x\in A}S_\varepsilon(x)$，又定义

$$\rho_h(A, B)=\inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon\mid B\subseteq S_\varepsilon(A) \text{ 和 } A\subseteq S_\varepsilon(B)\}.$$

设 X 是度量空间，$X^*=\{C\mid C\subseteq X, C \text{ 是闭集}\}$，则 ρ_h 是 X^* 上的度量. 度量 ρ_h 通常称为空间 X^* 的 **Hausdorff** 度量.

5.16 证明 任意一个度量空间 X 能与某个以 ρ' 为度量的度量空间 X' 同胚，其中 ρ' 满足条件：对任意 $x', y'\in X'$，都有 $\rho'(x', y')<1$. [提示：设 X' 的点与 X 的点相同，定义 $\rho'(x, y)=\rho(x, y)/[1+\rho(x, y)]$，其中 ρ 是 X 上的度量. 然后证明 ρ' 是度量且对任意 $x, y\in X$ 有 $\rho'(x, y)<1$，再证明映射 $f(x)=x$ 是同胚.]

§3 度量化定理

下面一系列定理和引理的目的是为了得出这样一个结论：每一个正则第二可数空间在定义 5.4 的意义下可度量化. 在准备证明这个结论之前，需要相当的技巧，下列引理就是将所需手段集中起来.

首先给出一个定义.

5.11 定义 设

$$\mathscr{H}=\{y \mid y=\{y_n\}, \text{对每一个 } n, y_n \text{ 都是实数且 } \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2<\infty\},$$

也就是说，$\mathscr{H}$ 是满足下面条件的所有实数序列所成的集合：$\mathscr{H}$ 中序列每一项的平方所形成的级数是收敛级数. 对 $x, y \in \mathscr{H}$，定义

$$\rho(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2},$$

由此形成的度量空间称为 **Hilbert** 空间.

例子（和练习）

5.17 证明 ρ 是 $\mathscr{H}$ 上的度量.

5.18 证明 由

$$E^1=\{x \mid x \in \mathscr{H}, x=\{x_n\}, \text{对 } n>1, x_n=0\}$$

定义的 $\mathscr{H}$ 的子空间与具有寻常拓扑的实直线同胚.

5.19 更一般地，由

$$E^n=\{x \mid x \in \mathscr{H}, x=\{x_i\}, \text{对 } i>n, x_i=0\}$$

定义的 $\mathscr{H}$ 的子空间与 n 维欧氏空间，即 $\bigtimes_{i=1}^{n} R_i$ 同胚，其中每一个 R_i 是具有寻常拓扑的实直线.

5.20 由

$$\mathscr{H}'=\{x \mid x\in\mathscr{H},\ x=\{x_n\},\ 对每一个 n,\ 0\leqq x_n\leqq 1/n\}$$

定义的 $\mathscr{H}$ 的子空间称为 **Hilbert 方块**(或 Hilbert 超平行体)．对每个 n，设 $I_n=[0, 1]$，它是具有实直线的相对拓扑的单位区间．又设 $I^\omega=\bigtimes_{n=1}^{\infty} I_n$，则 $\mathscr{H}'$ 与 I^ω 同胚．

5.21 证明 Hilbert 方块是紧的．

5.22 设 $A=\{x \mid x\in\mathscr{H},\ x_i=\delta_j^i,\ j=1, 2, \cdots\}$．

其中 δ_j^i 称为 Kronecker delta，其定义为

若 $i\neq j$，$\delta_j^i=0$；若 $i=j$，$\delta_j^i=1$．

也就是说，A 是 $\mathscr{H}$ 的"坐标轴"上单位点所成的集合．证明 A 是闭的但不紧．

5.23 单位球面

$$S=\left\{x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2=1,\ x=\{x_i\}\right\}\subseteq\mathscr{H}$$

是紧的吗？[提示：用上面练习 5.22.]

我们证明度量化定理的计划，是证明每一个第二可数的正则空间与 Hilbert 空间(实际上是 Hilbert 方块)的一个子集同胚，因此它是可度量化的．这样一来，我们需要作的便是用 $\mathscr{H}'$ 中与给定空间同胚的子空间的度量去确定一个相容的度量．为了定义由我们的空间 X 到 $\mathscr{H}'$ 的这个映射，我们必须说明某个预先指定的点 $x\in X$ 的象点 $y\in\mathscr{H}'$ 的各项 y_n．这样，就需要有某种方法来联系实数序列 $\{y_n \mid 0\leqq y_n\leqq 1/n\}$ 与我们空间的每一个点．

我们希望利用 X 的正则性，特别是用 3.18，它告诉我们对每个开集，因而也对点 $x\in X$ 的每个基元形成的邻域 B_i，存在另一个开集，这个开集可以选作另一个基元形成的 x 的邻域 B_j，使得

$x\in B_j\subseteq\overline{B}_j\subseteq B_i$. 这样一来 $\overline{B}_j$ 和 $X-B_i$ 将是不相交的闭集. 如果我们考虑满足条件 $\overline{B}_j\subseteq B_i$ 的 X 的基元所构成的全部集偶 (B_j, B_i) 的集合, 则这个集合是可数的(根据 X 的第二可数性). 如果我们能将每一个这样的集偶与实值函数 $\lambda_i(0\leqq\lambda_i(x)\leqq 1)$ 联系起来, 那末我们至少是部分地接近了问题的解决. 为了做到这点, 先证明下一个引理.

5.12 引理 (Urysohn) 设 X 是正规空间, 则对 X 的任意不相交的闭子集 A 与 B, 存在映射 $f: X\to I$, $I=[0, 1]$, 使得 $f(A)=0$, $f(B)=1$.

注 从正规空间着手可能会使人感到奇怪, 因为我们感兴趣的是第二可数的正则空间. 但是由 3.24 及其后面的练习可知, 第二可数的正则空间是正规空间.

证明 第一步. 设 $X-B=G_1$, 因为 B 是闭的, 故 G_1 是开的, 又因 $A\cap B=\phi$, 从而 $A\subseteq G_1$. 根据 3.19, 存在开集 $G_{1/2}$, 使得 $A\subseteq G_{1/2}\subseteq\overline{G}_{1/2}\subseteq G_1$.

第二步. 又根据 3.19, 存在开集 $G_{1/4}$ 和 $G_{3/4}$, 使得

$$A\subseteq G_{1/4}\subseteq\overline{G}_{1/4}\subseteq G_{1/2}\subseteq\overline{G}_{1/2}\subseteq G_{3/4}\subseteq\overline{G}_{3/4}\subseteq G_1.$$

第三步. 再根据 3.19, 存在开集 $G_{1/8}$, $G_{3/8}$, $G_{5/8}$ 和 $\subseteq G_{7/8}$, 使得

$$A\subseteq G_{1/8}\subseteq\overline{G}_{1/8}\subseteq G_{1/4}\subseteq\overline{G}_{1/4}\subseteq G_{3/8}\subseteq\overline{G}_{3/8}\subseteq G_{1/2}\subseteq\overline{G}_{1/2}$$
$$\subseteq G_{5/8}\subseteq\overline{G}_{5/8}\subseteq G_{3/4}\subseteq\overline{G}_{3/4}\subseteq G_{7/8}\subseteq\overline{G}_{7/8}\subseteq G_1$$

如此继续直到

第 N 步. 根据 3.19, 对每一个奇整数 $2i-1$, 这里 $1\leqq 2i-1\leqq 2^N-1$, 存在开集 $G_{(2i-1)/2^N}$, 使得 $A\subseteq G_{1/2^N}$ 且

$$\overline{G}_{(2i-2)/2^N}\subseteq G_{(2i-1)/2^N}\subseteq\overline{G}_{(2i-1)/2^N}\subseteq G_{2i/2^N}$$

对每个 i 成立.

根据归纳法, 对每一个 0 与 1 之间的二进分数 t, 即是说对每

一个分母是 $2^n(n\geqq 0)$ 的分数 t，我们能够作出开集 G_t，使得对两个二进分数 t 和 t'，$t<t'$ 必须且只需 $\overline{G}_t\subseteq G_{t'}$.

现在对 $x\in X$，定义

$$f(x)=\inf_{x\in G_t} t \qquad \text{对}\ x\notin B$$
$$=1 \qquad \text{对}\ x\in B.$$

注意到对所有 t，$A\subseteq G_t$，因此如果 $x\in A$，则 $f(x)=0$，又注意到 $0\leqq f(x)\leqq 1$.

下面的工作是证明 f 连续. 对 $0<y\leqq 1$ 考察 $f^{-1}([0, y))$ 的结构. 对 $f(x)\in[0, y)$，也就是 $0\leqq f(x)<y$，由于二进分数在 $[0, 1]$ 稠密，所以存在二进分数 t_0，使得

$$f(x)=\inf_{x\in G_t} t<t_0<y.$$

因此 $x\in G_{t_0}$. 另一方面，如果 $t_0<y$ 和 $x\in G_{t_0}$，则

$$f(x)=\inf_{x\in G_t} t<t_0<y，\text{从而}\ f(x)\in[0, y).$$

由此，我们看到 $f^{-1}([0, y))=\bigcup\limits_{t<y} G_t$. 因为对每个 t，G_t 是开的，所以对每个 y，$f^{-1}([0, y))$ 是开的.

根据同样的理由，显然

$$f^{-1}((y, 1])=\bigcup_{t>y}(X-G_t)$$

其中 $0\leqq y<1$. 因为 $G_t\subseteq\overline{G}_t$，所以对每个 t，$X-G_t\supseteq X-\overline{G}_t$. 由此

$$\bigcup_{t>y}(X-G_t)\supseteq\bigcup_{t>y}(X-\overline{G}_t).$$

又，如果 $x\in\bigcup\limits_{t>y}(X-G_t)$，则存在 $t>y$ 使得 $x\in X-G_t$，根据二进分数在 $[0, 1]$ 中的稠密性，可以选出二进分数 t'，使得 $t>t'>y$，则 $\overline{G}_{t'}\subseteq G_t$，故 $X-\overline{G}_{t'}\supseteq X-G_t$，所以对某个 $t'>y$ 有 $x\in X-\overline{G}_{t'}$，从而

$$x\in\bigcup_{t>y}(X-\overline{G}_t).$$

所以
$$\bigcup_{t>y}(X-G_t)\subseteq\bigcup_{t>y}(X-\overline{G}_t)$$

因此，最后有

$$\bigcup_{t>y}(X-G_t)=\bigcup_{t>y}(X-\overline{G}_t).$$

因为每个 $\overline{G}_t$ 是闭的，所以每个 $X-\overline{G}_t$ 是开的，从而我们得出 $f^{-1}((y, 1])=\bigcup_{t>y}(X-\overline{G}_t)$ 是开的.

现在设 U 是 $[0, 1]$ 中使 $f(x)\in U$ 的某个开集，则存在 $[0, 1]$ 中的基元 V，使得 $f(x)\in V\subseteq U$，且在 $[0, 1]$ 的相对拓扑中的这个基元 V 具有下列形式之一：

(1) $[0, y)$, $0<y<1$.

(2) $(y, 1]$, $0<y<1$.

(3) (y_1, y_2), $0<y_1<y_2<1$.

(4) $[0, 1]$.

如果 $V=[0, y)$，根据上面的证明 $f^{-1}(V)$ 是开的.

如果 $V=(y, 1]$，根据上面的证明 $f^{-1}(V)$ 是开的.

如果 $V=(y_1, y_2)$，则 $V=V_1\cap V_2$，其中 $V_1=[0, y_2)$，$V_2=(y_1, 1]$. 作为开集的交，$f^{-1}(V)=f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2)$ 是开的.

最后，如果 $V=[0, 1]$，$f^{-1}(V)=X$，则在任何情况下，对 $[0,1]$ 的任何基元，$f^{-1}(V)$ 都是开的. 由此，根据练习 2.12，f 是连续的. ▌

至此，我们已经作好了解决主要问题的一切准备.

5.13 定理 每一个第二可数的正则空间与 Hilbert 方块的一个子集同胚.

证明 设 $\mathscr{B}=\{B_i|i=1, 2, \cdots\}$ 是可数基. 根据 3.24 及其后面的练习可以知道，我们的空间是正规的，因此有 $\mathscr{B}$ 的元素形成

的满足条件 $\overline{B}_i \subseteq B_j$ 的集合偶. 因为 $\mathscr{B}$ 是可数的，故这样的集合偶所成的集合也是可数的，我们记为

$$\mathscr{P}=\{P_n | n=1,\ 2,\ \cdots\}$$

其中 $P_n=(B_i^n,\ B_j^n)$，$\overline{B_i^n} \subseteq B_j^n$. 因为 $\overline{B_i^n} \cap (X-B_j^n)=\phi$ 和 $\overline{B_i^n}$ 与 $X-B_j^n$ 都是闭集，根据 5.12，我们可以定义映射 $f_n: X \to I=[0,1]$，使得 $f_n(\overline{B_i^n})=0$，$f_n(X-B_j^n)=1$. 最后定义 $f: X \to \mathscr{H}'$，其中 $\mathscr{H}'$ 是 Hilbert 方块，

$$f(x)=\{f_n(x)/n \,|\, n=1,\ 2,\ \cdots\}.$$

因为对每个 x，$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$，所以 $f(x) \in \mathscr{H}'$.

我们首先证明 f 是一一的. 设 $x \neq y$，则因 X 是 Hausdorff 空间，根据 3.17，存在开集，且这样的开集可以选作基元 B，B'，使得 $x \in B$，$y \in B'$，$B \cap B'=\phi$. 又因 X 是正规的，我们能够找到 $B'' \in \mathscr{B}$，使得 $x \in B'' \subseteq \overline{B''} \subseteq B$，从而 $x \in \overline{B''}$，$y \in X-B$，这样一来集合偶 $(B'',\ B) \in \mathscr{P}$，也就是说对某个 n，$(B'',\ B)=(B_i^n,\ B_j^n)$. 这样一来

$$f_n(x)=f_n(\overline{B_i^n})=f_n(\overline{B''})=0,$$

且
$$f_n(y)=f_n(X-B_j^n)=f_n(X-B)=1.$$

由于 $f(x)$ 与 $f(y)$ 在第 n 个位置不相同，所以 $f(x) \neq f(y)$.

我们现在证明 f 的连续性. 设 $x \in X$，$\varepsilon>0$，我们希望作出 $U \in \mathscr{U}_x$，使得对任何 $y \in U$，有

$$\rho(f(x),\ f(y))<\varepsilon \text{ 在 } \mathscr{H}' \text{ 中成立.}$$

首先，因为对任意点 $y \in X$，$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ 成立，所以

$$|f_n(x)-f_n(y)|^2 \leqq 1.$$

由于无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ 收敛，因此，当 N 充分大时

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^{-2}<\frac{\varepsilon^2}{2},$$

从而 $$\sum_{n=N}^{\infty}|f_n(x)-f_n(y)|^2n^{-2}\leqq\sum_{n=N}^{\infty}n^{-2}<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

现在，设 $k<N$，因为函数 $f_k: X\to I$ 连续，所以存在 $U_k\in\mathscr{U}_x$，使得当 $y\in U_k$ 时，有

$$|f_k(x)-f_k(y)|<\frac{k\varepsilon}{(2(N-1))^{1/2}},$$

或 $$\frac{|f_k(x)-f_k(y)|^2}{k^2}<\frac{\varepsilon^2}{2(N-1)}.$$

今设 $U=\bigcap_{k=1}^{N-1}U_k$，如果 $y\in U$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|^2}{n^2}=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|^2}{n^2}$$

$$+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|^2}{n^2}$$

$$<(N-1)\frac{\varepsilon^2}{2(N-1)}+\frac{\varepsilon^2}{2}=\varepsilon^2,$$

所以 $\rho(f(x), f(y))<\varepsilon$，从而 f 连续.

最后，我们必须证明 f 是开映射．设 U 是 X 中的开集，则对 $x\in U$，存在 B_i, $B_j\in\mathscr{B}$，使得

$$x\in B_i\subseteq\overline{B}_i\subseteq B_j\subseteq U,$$

这可由 X 的正规性及 $\mathscr{B}$ 是基这两条得出．由此，集偶 $(B_i, B_j)\in\mathscr{P}$. 设 $(B_i, B_j)=(B_i^n, B_j^n)$，则

$$f_n(x)=f_n(\overline{B_i^n})=0,$$

又因为 $X-U\subseteq X-B_j^n$，从而

$$f_n(X-U)=f_n(X-B_j^n)=1,$$

所以对任意 $y\in X-U$，有

$$\rho(f(x), f(y))=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|^2}{n^2}\right]^{1/2}$$

$$\geqq\left[\frac{|f_n(x)-f_n(y)|^2}{n^2}\right]^{1/2}=\frac{1}{n}.$$

这样，如果 $V=S_{1/n}(f(x))\subseteq\mathscr{K}'$，则由 $y\in V$ 可得出

$$\rho(f(x),\ y)<\frac{1}{n} \quad 和 \quad f^{-1}(y)\in U.$$

因为，如果不是这样，则有

$$f^{-1}(y)\in X-U \quad 和 \quad \rho(f(x),\ f(f^{-1}(y))\geq\frac{1}{n},$$

这是一个矛盾. 所以 $f^{-1}(V)\subseteq U$，从而 $x\in V\subseteq f(U)$，由此得出 $f(U)$ 是开的. 总而言之，我们已经证明了 f 是一一连续开映射，所以 f 是 X 与 Hilbert 方块某子集之间的同胚. ▮

5.14 定理 每一个第二可数空间是可度量化的必须且只需它是正则的.

证明 如果 X 是第二可数的正则空间，根据 5.13, X 是可度量化的.

反之，如果 X 是第二可数空间而且可以度量化，则 X 是具有某个度量 ρ 的度量空间，由 5.6, X 是正规空间，又由 3.17, X 是正则的. ▮

例子（和练习）

5.24 证明每一个局部紧的第二可数 Hausdorff 空间是可度量化的. [提示：紧化这个空间.]

5.25 证明 Urysohn 引理(5.12)的逆命题成立.

§4 完备度量空间

我们现在的计划是考察另一类特殊的度量空间. 这一类空间具有区别于其他空间的性质——完备性，这是一个比紧性弱一点的性质. 这类空间在分析中起着重要的作用. 事实上，分析中的 Banach 空间本质上是具有某些代数结构的完备度量空间. 因此，

完备度量空间对于爱好分析的学生有特殊的趣味.

5.15 定义 设 X 是度量空间, $\{x_n\}\subseteq X$ 是序列. 如果对每个 $\varepsilon>0$, 存在整数 $N>0$, 使得 $m, n>N$ 时有 $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 是 **Cauchy 序列**.

5.16 定义 设 X 是度量空间, 如果 X 中的每一个 Cauchy 序列都收敛于 X 中的点, 则称 X 是**完备的**.

例子(和练习)

5.26 具有度量

$$\rho(x, y)=|x-y|$$

的实直线是完备度量空间.

5.27 n 维欧氏空间 E^n——n 个实直线的拓扑积, 是具有度量

$$\rho(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right]^{1/2}$$

的完备度量空间.

5.28 Hilbert 空间是完备度量空间.

5.29 设

$C[0, 1]=\{f\,|\,f$ 是以 $[0, 1]$ 为定义域的实值连续函数$\}$

又设

$$\rho(f, g)=\sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)-g(x)|,$$

则 $C[0, 1]$ 是完备度量空间.

5.30 设 m 是由所有实值有界序列组成的集合, 即是说

$m=\{x=\{x_n\}\,|$ 对每一个 $n=1, 2, \cdots, x_n$ 是实数, 且对某个依赖于 x 的实数 K_x, $|x_n|<K_x\}$.

定义 $$\rho(x, y)=\sup_n|x_n-y_n|,$$

则 m 是完备度量空间.

5.31 设 c 是所有的实收敛序列所成的集合，定义 $\rho(x, y)=\sup\limits_n|x_n-y_n|$，则 c 是完备度量空间，且它是前一个习题中的空间 m 的子空间。

5.32 证明完备度量空间的定义可以削弱为仅只需要每一个 Cauchy 序列在 X 中有极限点，即是证明如果度量空间 X 中的 Cauchy 序列有极限点 x_0，则它收敛于 x_0。

5.33 证明每一个紧的度量空间是完备的。[提示：用上面的练习 5.32 和 3.26.]

5.34 证明完备度量空间的任意闭子空间是完备的。

5.35 (a) 设 R 是实直线，定义 $f:R\to(-1, 1)$，其中

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|},$$

则 f 是同胚。

(b) R 是完备度量空间，但是与 R 同胚(根据(a))的子空间 $(-1, 1)$ 不是完备的，因为 Cauchy 序列

$$\left\{\frac{n}{1+n}\middle|n=1, 2, \cdots\right\}$$

不收敛于 $(-1, 1)$ 中的点。

5.36 完备性不是拓扑性质。[提示：用上面练习 5.35.]

5.37 (a) 设 X 是度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中满足条件 $\lim\limits_n x_n=x_0\in X$ 的序列。证明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列。

(b) 如果 $Y\subseteq X$，Y 是 X 的子空间且 Y 是完备的，证明 Y 是 X 中的闭集。

(c) 如果 $X=R$，则 X 的任意完备有界子集是紧的。[集合 $A\subseteq X$ 称为有界的，如果存在点 $x\in X$ 及有限实数 N，使得 $A\subseteq S_N(x)$.]

5.38 设 $A=\{x|x_i=\delta_i^j, j=1, 2, \cdots\}\subseteq\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间的单

位点所成的集合(参看练习 5.22). 证明 A 是完备且有界的,但是 A 不紧.

练习 5.37 遇到的情况也会出现在稍微更一般的空间中,即在任意欧氏空间 $E^n=\times_{i=1}^{n} R_i$ 中,完备有界子空间是紧的,R_i 是实数集. 可惜象上面练习 5.38 表明的那样,这个结果在一般情况下并不成立. 但我们不必灰心,因为加强一点条件就能克服这个困难.

这首先需要作出下一个定义.

5.17 定义 度量空间称为**完全有界的**. 如果对每个 $\varepsilon>0$,存在有限集 $F=\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_\varepsilon}\}$,使得 $X\subseteq\bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} S_\varepsilon(x_i)$.

由此有下一个定理.

5.18 定理 每一个完备完全有界的度量空间是紧空间. 反之,这个定理的逆定理也成立.

证明 设 X 是完备和完全有界的. 根据 5.10, 我们只证明 X 是列紧的. 为此目的, 设 A 是 X 的一个无限子集. 由于 $\frac{1}{2}>0$, 由 X 的完全有界性,存在

$$F_1=\{x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n_1}\}$$

使 $X\subseteq\bigcup_{i=1}^{n_1} S_{1/2}(x_{1i})$. 且对某个 i, $S_{1/2}(x_{1i})\cap A$ 是无限集, 因为如果不是这样, A 将是有限集. 将 F_1 的点适当重新命名, 我们能够假设 $S_{1/2}(x_{11})\cap A$ 是无限集. 设 $A_1=A\cap S_{1/2}(x_{11})$.

同样,存在 $F_2=\{x_{21},\ x_{22},\ \cdots,\ x_{2n_2}\}$ 使

$$X\subseteq\bigcup_{i=1}^{n_2} S_{1/4}(x_{2i}).$$

因为 A_1 是无限集,故有 i 使得 $S_{1/4}(x_{2i})\cap A_1$ 是无限的, 我们也可以设 $A_2=S_{1/4}(x_{21})\cap A_1$ 是无限集. 一般而言, 如果已经定义了

A_{k-1}，则存在 $F_k=\{x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn_k}\}$ 使得

$$X\subseteq\bigcup_{i=1}^{n_k}S_{1/2^k}(x_{ki}),$$

且对某个 i 有 $A_{k-1}\cap S_{1/2^k}(x_{ki})$ 是无限集，我们可以设这个 i 是 1，由此设 $A_k=A_{k-1}\cap S_{1/2^k}(x_{k1})$。可以看出对每个 $k>1$，一般地有 $A_k\subseteq A_{k-1}$。

现在选取 $x_1\in A_1$，$x_2\in A_2-\{x_1\}$，一般而言，取

$$x_k\in A_k-\bigcup_{i=1}^{k-1}\{x_i\}.$$

因为每一个 A_k 是无限集，所以这样的选择总是可能的。而且，这样选出的序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列。因为设 $\varepsilon>0$，我们可以选取 $k>0$，使得 $1/2^{k-1}<\varepsilon$，如果 $m, n\geq k$，则

$$x_m\in A_m\subseteq A_k \quad 和 \quad x_n\in A_n\subseteq A_k,$$

又因 $A_k\subseteq S_{1/2^k}(x_{k1})$，所以 $x_n, x_m\in S_{1/2^k}(x_{k1})$，从面

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m)&\leq\rho(x_n, x_{k1})+\rho(x_{k1}, x_m)\\&<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}<\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 X 是完备的，所以 $\{x_n\}$ 收敛于某个点 $x_0\in X$。又因为 $\{x_n\}\subseteq A$，故 x_0 是 A 的极限点。由此 X 是列紧的，再根据前面关于 5.10 的论述，我们已经完成了证明。

相反的证明比较容易，我们将它留给学生去完成。∎

§5 范畴定理

我们现在研究导出了称为 Baire 范畴定理（有时称为 Baire-Moore 定理）的一系列定理。这些定理有时能在拓扑和分析中找到用处。

首先需要一个定义。

5.19 定义 设 X 是拓扑空间，$N\subseteq X$，如果 $(\overline{N})^\circ=\phi$（也就是

说，如果 N 的闭包的内部是空集)，则称 N **无处稠密**。

练　　习

5.39 如果 $N\subseteq X$ 是无处稠密的，则

(a) $(\overline{N})^c$ 在 X 中稠密。

(b) 对每一点 $x\in X$ 和每一个使得 $x\in O$ 的开集 O，存在非空开集 O_1，使得 $O_1\subseteq O$ 和 $O_1\subseteq N^c$。

5.20 定义　X 是拓扑空间，集合 $B\subseteq X$。如果 B 是可数个无处稠密集合之并，则称它为 **Baire 第一范畴集**。如果 B 不是 Baire 第一范畴集，则称它为 **Baire 第二范畴集**。如果 B 在 X 中的余集是 Baire 第一范畴集，则称它为**剩余集**。

5.21 定理　设 X 是度量空间，则 X 是完备的当且仅当对每一个闭集序列 $\{C_n\}$，如对每一个 n，它满足条件 $C_{n+1}\subseteq C_n$ 并且

$$\lim_n \delta(C_n)=0,$$

则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ 是一个单点集。

注：$\delta(A)=\sup_{x,y\in A}\rho(x, y)$。(参看练习 5.6.)

证明　假若 X 是完备的。构造序列

$$\{x_n | x_n\in C_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\},$$

则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列。因为设 $\varepsilon>0$，我们可以选取 $N_\varepsilon>0$，使得 $n>N_\varepsilon$ 时有 $\delta(C_n)<\varepsilon$ 成立，因为 $n\geqq m>N_\varepsilon$ 时有 $x_n\in C_n\subseteq C_m$ 成立，又因为 $x_m\in C_m$，所以

$$\rho(x_n,\ x_m)\leqq\delta(C_m)<\varepsilon.$$

由于 X 是完备的，所以 $\{x_n\}$ 收敛于某个点 $x_0\in X$。

如果对某个 $N>0$，当 $n>N$ 时总是有 $x_n=x_0$，则

$$x_0=x_n\in C_n\subseteq C_k$$

对 $1\leqq k\leqq n$ 成立，从而 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$.

另一方面，如果有任意大的 n，使得 $x_n\neq x_0$，取定 $m>0$，因为 $\lim_n x_n=x_0$，所以对 $\varepsilon>0$，存在 $n>m$，使得

$$x_n\neq x_0,\quad \rho(x_n, x_0)<\varepsilon.$$

由此即知 x_0 是 C_n 的极限点，又因为 C_n 是闭的，从而 $x_0\in C_n$. 因为 $C_n\subseteq C_m$，故有 $x_0\in C_m$. 再根据 m 的任意性，$x_0\in C_m$ 对所有的 m 都成立，从而

$$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n.$$

现在假设 $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$. 对 $\varepsilon>0$，选取 N_ε 使得 $n>N_\varepsilon$ 时 $\delta(C_n)<\varepsilon$ 成立，则

$$x_0,\ y\in C_n\quad 和\quad \rho(x_0, y)\leqq\delta(C_n)<\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，从而 $\rho(x_0, y)=0$，所以 $x_0=y$. 由此

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n=\{x_0\}.$$

反之，假若定理的条件成立. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列，$S_\varepsilon(x)=\{y\,|\,\rho(x, y)<\varepsilon\}$. 对每个正整数 k，存在正整数 n_k，当 $n\geqq n_k$ 时有 $\rho(x_{n_k}, x_n)<1/2^k$，而且我们可以假定选出的 n_k 是具有这个性质的最小整数. 这说明 $n_k\leqq n_{k+1}$.

定义 $$C_k=\overline{S_{1/2^{k-1}}(x_{n_k})}\quad k=1, 2, \cdots.$$

显然 $$C_k\subseteq\left\{y\,\middle|\,\rho(x_{n_k}, y)\leqq\frac{1}{2^{k-1}}\right\}$$

因此 $\delta(C_k)\leqq1/2^{k-2}$ 与 $\lim_k\delta(C_k)=0$.

我们证明 C_k 是递减序列，也就是说 $C_{k+1}\subseteq C_k$. 设 $y\in C_{k+1}$，则由 n_k 的选取有

$$\rho(y, x_{n_{k+1}})\leqq\frac{1}{2^k}\quad 和\quad \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})\leqq\frac{1}{2^k}.$$

由此得

$$\rho(y,\ x_{n_k})\leq\rho(y,\ x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}},\ x_{n_k})$$
$$\leq\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}},$$

从而 $y\in C_k$. 所以 $C_{k+1}\subseteq C_k$.

根据假设条件 $\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k=\{x_0\}$ 是单点集. 对 $\varepsilon>0$, 选取 k, 使得 $1/2^{k-2}<\varepsilon$, 则当 $n>n_k$ 时, 因为 $x_0\in C_k$, $\rho(x_0,\ x_{n_k})\leq 1/2^{k-1}$, 从而

$$\rho(x_0,\ x_n)\leq\rho(x_0,\ x_{n_k})+\rho(x_{n_k},\ x_n)$$
$$\leq\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2^{k-2}}<\varepsilon.$$

由此 $\lim\limits_{n}x_n=x_0$, 所以 X 是完备的. ∎

5.22 定理 设 X 是完备度量空间, 则 X 是 Baire 第二范畴集.

证明 设 $N\subseteq X$, N 是第一范畴集. 我们只需证明 $N\neq X$ 或存在点 $x\in X-N$.

$N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n$, 其中 N_n 是无处稠密的. 因为对每个 n, $(\overline{N}_n)^c$ 在 X 中稠密, 由练习 5.39, 存在点 $x_1\in(\overline{N}_1)^c$ 与 $\varepsilon>0$, 使得 $S_\varepsilon(x_1)\cap N_1=\phi$. 所以

$$\overline{S_{\varepsilon/2}(x_1)}\subseteq S_\varepsilon(x_1)\quad 与\quad \overline{S_{\varepsilon/2}(x_1)}\cap N_1=\phi.$$

设 $\varepsilon/2=\varepsilon_1$, 因为 $(\overline{N}_2)^c$ 在 X 中稠密, 所以存在点 $x_2\in S_{\varepsilon_1}(x_1)\cap(\overline{N}_2)^c$. 同前面一样, 我们选取 $\varepsilon_2>0$, 使得

(1) $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1/2$,

(2) $\overline{S_{\varepsilon_2}(x_2)}\cap N_2=\phi$,

(3) $\overline{S_{\varepsilon_2}(x_2)}\subseteq\overline{S_{\varepsilon_1}(x_1)}$,

一般而言, 对每个 n, 选取 $x_n\in S_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})\cap N_n$ 和 ε_n, 使得

(1) $0<\varepsilon_n<\varepsilon_{n-1}/2$,

(2) $\overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)} \cap N_n = \phi$,

(3) $\overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq \overline{S_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})}$.

这样一来，我们得到了递减的闭集序列 $\overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)}$ 而且 $\delta(\overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)}) < \varepsilon/2^n \to 0$，因此根据 5.21，存在点 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)}$.

设 $m>0$ 被固定，则

$$x_0 \in \overline{S_{\varepsilon_m}(x_m)} \quad 与 \quad \overline{S_{\varepsilon_m}(x_m)} \cap N_m = \phi,$$

所以 $x_0 \notin N_m$. 又由于 m 是任意的，从而对任意 m，$x_0 \notin N_m$. 所以

$$x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = N, \quad x_0 \in X - N,$$

从而 X 不是 Baire 第一范畴集. ▌

5.23 定理 设 X 是完备度量空间，$R \subseteq X$，R 是剩余集，则 R 是稠密的.

证明 设 $x \in X - R$，我们只需证明 x 是 R 的极限点. 因为 $X - R$ 是第一范畴集，所以

$$X - R = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n,$$

其中每一个 N_n 是无处稠密的. 设 O 是开集且 $x \in O$，我们选取 $\varepsilon > 0$ 使 $S_\varepsilon(x) \subseteq O$. 现在着手构造点的序列 $\{x_n\}$ 和这些点的邻域的闭包，这些点的邻域 $S_{\varepsilon_n}(x_n)$ 象在 5.22 证明中那样，使得

(1) $0 < \varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}/2$,

(2) $\overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)} \cap N_n = \phi$,

(3) $\overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq \overline{S_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})}$,

并且还有 $x_1 \in S_\varepsilon(x)$ 和 $\overline{S_{\varepsilon_1}(x_1)} \subseteq S_\varepsilon(x)$. 这是可能的，因为 x_1 选自 $(\overline{N}_1)^c$，而 $(\overline{N}_1)^c$ 是 X 的稠密子集，所以存在 $x_1 \in S_\varepsilon(x) \cap (\overline{N}_1)^c$，且我们可以选取 ε_1 使 $\overline{S_{\varepsilon_1}(x_1)} \subseteq S_\varepsilon(x)$. 则象在 5.22 中一样，

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq S_\varepsilon(x)$$

且 $x_0 \notin N$. 由此, 在每一个包含 x 的开集 O 中, 有 $x_0 \in X - N = R$. 所以 $x \in \bar{R}$, 因此 R 在 X 中稠密. ∎

例子(和练习)

5.40 在练习 5.29 的空间 $C[0, 1]$ 中, 我们知道这个空间是完备的, 设

$$P_m = \{f \mid \text{对某个 } x \in [0, 1], \text{对正整数 } m \text{ 和对所有 } h > 0, \ |(f(x+h) - f(x))/h| \leq m\}.$$

设 $S = C[0, 1] - \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$, 则 S 是在 $[0, 1]$ 上任意点都没有有限右导数, 但在 $[0, 1]$ 上连续的全体函数所成的集合.

(a) 证明每一个 P_m 是闭的.

(b) 证明对每个 $f \in P_m$ 和每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C[0, 1]$, 使得 $g \notin P_m$, $g \in S_\varepsilon(f)$. [提示: 在 $\varepsilon/2$ 误差范围内用折线逼近 f, 然后在 $\varepsilon/2$ 误差范围内用具有下述性质的锯齿线逼近折线的每一段: 锯齿线的齿的边缘有绝对值大于 m 的正或负的斜率.]

(c) 用上面的(a)和(b)证明每一个 P_m 无处稠密.

(d) 证明 $\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$ 是 Baire 第一范畴集.

(e) 证明 $S \neq \phi$.

(f) 证明在 $[0, 1]$ 上存在这样的连续函数: 它在 $[0, 1]$ 的任何点都没有有限导数.

5.41 (a) 设 X 是完备度量空间, $f: X \to X$ 是使 $\rho(f(x), f(y)) < \alpha\rho(x, y)$ 成立的映射, 其中 $0 < \alpha < 1$ 且 α 不依赖于 x 或 y. 证明存在点 $x_0 \in X$, 使得 $f(x_0) = x_0$. [提示: 设 $x \in X$, 定义 $x_1 = x$, $x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 又设 $x_0 = \lim_n x_n$. 证明 x_0

具有性质 $f(x_0)=x_0$.]

(b) 进而证明 x_0 是唯一的，即是说没有另外的点 x_1 使得 $f(x_1)=x_1$.

(c) 考虑具有边界条件 $y(x_0)=y_0$ 的微分方程 $y'=f(x,y)$，其中 x 和 y 是实数．设 f 是在

$D=\{(x, y) \mid |x-x_0|\leqq a, |y-y_0|\leqq b, a>0, b>0\}$

上的连续函数，又设 $N=\max\limits_{x,y\in D}|f(x, y)|$ 且 $aN<b$. 再设对某个固定的 $K>0$, f 满足 Lipschitz 条件

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqq K|y_1-y_2|,$$

$$(x, y_1) \text{ 与 } (x, y_2)\in D.$$

现在定义

$X=\{y(x) \mid y$ 是实变量 x 的实值连续函数且对 $|x-x_0|\leqq a$ 有 $|y(x)-y_0|\leqq b\}$,

又定义

$$\rho(y_1, y_2)=\sup_{|x-x_0|\leqq a}|y_1(x)-y_2(x)|,$$

$$y_1, y_2\in X.$$

证明 X 是具有度量 ρ 的完备度量空间.

(d) 设 X 与上面(c)中的 X 相同，由

$$T(y)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(z, y(z))dz$$

定义 $T: X\to X$. 证明 $T(y)\in X$. 进而证明

$$\rho(T(y_1), T(y_2))\leqq aK\rho(y_1, y_2).$$

现在选取 a 如此小，使 $aK<1$.

(e) [(d)的继续] 证明存在唯一的 $y\in X$, 使得 $T(y)=y$, 即是

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(z,\ y(z))dz,$$

因此，具有边界条件 $y(x_0)=y_0$ 的微分方程 $y'(x)=f(x,\ y)$ 至少在 D 的 $a<1/K$ 部分有唯一解.

5.42 (学期论文) 这个习题的目的是将经常使用的由有理数得到实数的技巧一般化. 具体说来，我们希望证明任意的度量空间(例如有理数集)与某个完备度量空间(例如实数集)的一个子空间等距.

现在设 X 是具有度量 ρ 的度量空间. 设

$$Y=\{\{x_n\}\mid\{x_n\}\ \text{是诸点}\ x_n\in X\ \text{组成的 Cauchy 序列}\}.$$

在 Y 中定义关系"$\sim$"为

$$x=\{x_n\}\sim y=\{y_n\}$$

当且仅当 $\lim\limits_{n}\rho(x_n,\ y_n)=0$.

(a) 证明"$\sim$"是 Y 中的等价关系.

(b) 设 $Z=Y/\sim$，也就是说 Z 是在等价关系"$\sim$"下 Y 中元素的所有等价类所成的集合. 用 $\bar{x}=[x]$ 表示元素 $\bar{x}\in Z$，这里 $x\in Y$，$x=\{x_n\}$，$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 在 Z 中定义

$$\bar{\rho}(\bar{x},\ \bar{y})=\lim_{n}\rho(x_n,\ y_n).$$

则

(i) 证明 $\bar{\rho}$ 与 $\{x_n\}\in[x]$ 和 $\{y_n\}\in[y]$ 的选取无关.

(ii) 证明 $\bar{\rho}$ 是 X 上的度量.

(c) 若 Z 具有由 $\bar{\rho}$ 产生的度量拓扑. 证明 Z 是完备的.

(d) 定义 $f:X\to Z$ 为 $f(x)=[x]=[\{x_n\}]$，其中对所有 n,

都有 $x_n=x$，也就是说每一个点 $x\in X$ 被映为一个常数序列 $x, x, x, \cdots$. 证明 f 是 X 与 Z 的一个子集之间的等距.

(e) 证明 $f(X)$ 在 Z 中稠密.

(f) 证明 X 是可分的当且仅当 Z 是可分的.

参 考 书

希望下列书目成为进一步学习点集拓扑学的指南. 这些书有的与本书讨论的内容相同. 但是, 无论在进一步研究点集拓扑学或是在讨论点集拓扑学对代数拓扑学和分析的应用方面, 许多书都相当大地超出了我们讨论的范围. 这些书各有自己的优点, 但著者认为 Kelley 的书和由 Hocking 与 Yony 合著的书特别有用。

1. Alexandroff, P., and H. Hopf, *Topologie* (Ann Arbor, Mich.: Edwards, 1945).
2. Arnold, B. H., *Intuitive Concepts in Elementary Topology* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1962).
3. Bourbaki, N., *Topologie Générale* (Paris: Actualités Scientifiques et Industrielles, Herman et Cie., 858(1940) =1152(1951), 916 (1942) = 1143(1951), 1029(1947), 1045(1948), 1084(1949)).
4. Hall, D. W., and G. L. Spencer, *Elementary Topology* (New York: Wiley, 1955).
5. Hausdorff, F., *Mengenlehre*(Berlin: De Gruyter, 1927, 1935).
6. Hocking, J. G., and G. S. Young, *Topology* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961).
7. Hurewicz, W., and H. Wallman, *Dimension Theory* (Princeton, N. J.: Princeton, 1941).
8. Kelley, J. L., *General Topology* (Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1955).
9. Kuratowski, K., *Introduction to Set Theory and Topology*(New York: Pergamon, 1961).
10. Kuratowski, K., *Topologie*, vols. 1 and 2 (2nd ed.; Warsaw, 1948).
11. Mansfield, M. J., *Introduction to Topology* (Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1963).
12. Moore, R. L., *Foundations of Point Set Theory* (New York: American

Mathematical Society Colloquium Publication No. 13, 1932).

13. Newman, M. H. A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points* (New York: Cambridge U. P., 1939).
14. Patterson, E. M., *Topology* (New York: Interscience, 1959).
15. Sierpiński, W., *Introduction to General Topology*(Toronto: University of Toronto Press, 1934, 1952).
16. Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis* (New York: McGraw, 1963).
17. Vaidynathaswamy, R., *Treatise on Set Topology*, Part 1 (Madras: Indian Mathematical Society, 1947).
18. Whyburn, G. T., *Analytic Topology* (New York: American Mathematical Society Colloquium Publication No. 28, 1942).
19. Wilder, R. L., *Topology of Manifolds* (New York: American Mathematical Society Colloquium Publication No. 32, 1949).

索　　引*

一　画

一一对应	one-to-one correspondence	11
一一函数	one-to-one function	57
一个集合到另一个集合的距离	distance from one set to another	118

三　画

下界	lower bound	17
下确界	infimum	17
上界	upper bound	17
上确界	supremum	17
子集	subset	2
子空间	subspace	36

四　画

Hilbert 方块	Hilbert cube	125
开集	open set	23
开函数	open function	61
无限集	infinite set	11
无处稠密的	nowhere dense	136
内函数	interior function	61
分离公理	separation axiom	78
分离的	separated	98
分离集	separated set	98
公理	axiom	12

* 以拉丁字母开头的条目按其后第一个汉字笔数排列。

De Morgan 公式	De Morgan's rule	4
Urysohn 引理	Urysohn's lemma	126
Zorn 引理	Zorn's lemma	74

五 画

可数基	countable base	47
可数集	countable set	12
可数紧	countably compact	89
可数紧空间	countably compact space	89
可数无限	countably infinite	12
可数无限集	countably infinite set	12
可分的	separable	47
可分空间	separable space	47
可度量化空间	metrizable space	116
正规空间	normal space	80
正则空间	regular space	80
平面寻常拓扑	usual topology for plane	22
平庸拓扑	trivial topology	23
右序拓扑	right order topology	23
加细	refinement	96
对称	symmetry	9
包含	inclusion	2

六 画

闭	closed	31
闭集	closed set	31
闭函数	closed function	61
并	union	3
交	intersection	3
关系	relation	9
自反性	reflexivity	9
自稠密的	dense in itself	112

在……点连续	continuous at a point	57
在……点连续的函数	a function is continuous at a point	57
有限集	finite set	12
有界集	bounded set	133
有限交性	finite intersection property	71
划分	partition	9
因子空间	factor space	64
同胚	homeomorphism	60
全序关系	simple order relation	10
传递性	transitivity	9
仿紧	paracompact	96
仿紧空间	paracompact space	96
导集	derived	28

七　画

完全有界的	totally bounded	134
完全不连通的	totally disconnected	110
完全正规空间	completely normal space	87
完备的	complete	132
完备度量空间	complete metric space	132
序	order	10
序关系	order relation	10
Cauchy 序列	Cauchy sequence	132
良序(的)	well-ordered	13
连续	continuous	57
连续象	continuous image	60
连续函数	continuous function	57
连通	connected	98
连通空间	connected space	98
连通分支	component	104
极限点	limit point	27
Lipschitz 条件	Lipschitz condition	141

邻域	neighborhood	20
邻域系	system of neighborhoods	20
局部紧	locally compact	92
局部紧空间	locally compact space	92
局部连通	locally connected	106
局部连通空间	locally connected space	106
局部有限	locally finite	96

八 画

Baire-Moore 定理	Baire-Moore theorem	135
Lindelöf 定理	Lindelöf theorem	88
Tychonoff 定理	Tychonoff theorem	77
单点紧化	one-point compactification	94
单链	simple chain	100
T_0 空间	T_0 space	79
T_1 空间	T_1 space	79
T_2 空间	T_2 space	40
T_3 空间	T_3 space	79
T_4 空间	T_4 space	79
Hausdorff 空间	Hausdorff space	40
Hilbert 空间	Hilbert space	124
实直线的寻常拓扑	usual topology for line	22
拓扑	topology	20
拓扑空间	topological space	20
拓扑性质	topological property	61
拓扑的基	base for a topology	43
拓扑的比较	comparison of topologies	42
拓扑的次基	sub-base for a topology	50
直径	diameter	117
Tychonoff 板	Tychonoff pank	84
Euler-Venn 图	Euler-Venn diagram	7
函数	function	55

函数的限制	restriction of a function	55
函数的扩张	extension of a function	55
弧	arc	109
弧连通	arcwise connected	109
弧连通空间	arcwise connected space	109
范畴	category	136
Baire 范畴	Baire category	136

九　画

度量	metric	114
度量集	metric set	114
度量空间	metric space	115
度量拓扑	metric topology	115
Hausdorff 度量	Hausdorff metric	123
逆象	inverse image	56
差	difference	4
指标集	indexing set	5
相对拓扑	relative topology	36
映射	mapping	57
点的序列的极限	limit of a sequence of points	38
点到集合的距离	distance from a point to a set	118
恒等函数	identity function	55
选择函数	choice function	12
选择公理	axiom of choice	12

十　画

离散拓扑	descrete topology	23
被……连锁	chained by	100
较细的拓扑	finer topology	42
真包含	proper inclusion	2
格	lattice	54
紧	compact	69

紧空间	compact space	69
积	product	65
积拓扑	product topology	65
积空间	product space	65
射影	projection	65

十一画

常值函数	constant function	55
基	base	43
球极平面射影	stereographic projection	92
象	image	55
第一可数性公理	first axiom of countability	49
第二可数性公理	second axiom of countability	47
笛卡儿积	Cartesian product	6
偏序关系	patial order relation	10

十二画

割点	cut point	113
最大下界	greatest lower bound	17
最小上界	least upper bound	17
剩余集	residual	136
等价	equivalence	9
等价类	equivalence class	9
等价关系	equivalence relation	9
等距	isometry	117
集	set	1
集合的差	difference of sets	4
集合的交	intersection of sets	3
集合的并	union of sets	3
集合的内部	interior of a set	35
集合的边界	frontier of a set	33
集合的余集	complement of a set	4

集合的闭包	closure of a set	28
集合的元素	elements of a set	1
集合的相等	equality of sets	2
集合包含	set inclusion	2
集合真包含	proper set inclusion	2
集合序列的极限	limit of a sequence of sets	39
集合序列的上极限	limit superior of a sequence of sets	39
集合序列的下极限	limit inferior of a sequence of sets	39
集合的笛卡儿积	Cartesian product of sets	6
Cantor 集	Cantor set	111
链	chain	100

十 三 画

数学归纳法	mathematical induction	17
稠密	dense	33
稠密集	dense set	33
满(的)	onto	57
满函数	onto function	57

十 八 画

覆盖	cover	69

